

GK 11 Mathematik Analysis: Funktionsuntersuchung mit GTR

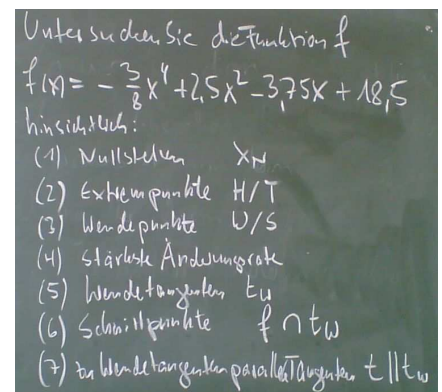
Bei Hausaufgaben und in Klausuren ist es vorteilhaft, wenn die eigenen Berechnungen zu Funktionsuntersuchungen und Tangentenproblemen zur Probe auch mit dem GTR nachvollzogen werden. Fehler in der Berechnung werden so schnell erkannt und können zumindest kommentiert, besser korrigiert werden.

Aufgabe:

Untersuchen Sie die Funktion f mit

$$f(x) = -\frac{3}{8}x^4 + 2,5x^2 - 3,75x + 18,5 \text{ hinsichtlich}$$

- (1) Schnittpunkte mit den Achsen
- (2) Extrempunkte
- (3) Wendepunkte
- (4) Stelle mit größter Änderungsrate
- (5) Wendetangenten
- (6) Schnittpunkte der Wendetangenten mit $G(f)$
- (7) Tangenten parallel zu den Wendetangenten
- (8) Schnittpunkt beider Wendetangenten



Vorbereitungen am GTR:

Im Y-Editor Term $f(x)$ eingeben:

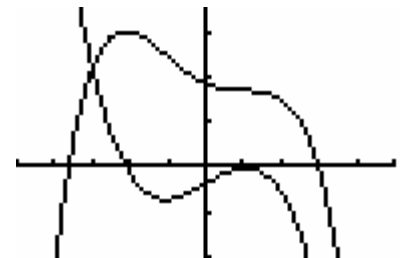
$$Y1 = (-)3/8 * X^4 + 2.5 * X^2 - 3.75 * X + 18.5$$

im Y-Editor Ableitungsterm bestimmen lassen: $Y2 = nDeriv(Y1, X, X)$

($nDeriv$ mit II.MATH Math 8: $nDeriv()$ und $Y1$ mit VARS Y-VARS)

unter WINDOW geeignete Einstellungen zur Anzeige beider Graphen

wählen: $-5 < x < 5$ und $-20 < y < 35$



Probe mit dem GTR:

zu (1) y-Achsenabschnitt: mit TRACE ($Y1$ wählen!) $X=0$ liefert $Y=18,5$

Nullstellen: II.Calc 2:zero ($Y1$ wählen!) mit left=-4 und right=guess=-2 liefert $X=-3.63$

mit left=2 und right=guess=4 liefert $X=2.98$

zu (2) Extrempunkte:

II.Calc 4:maximum ($Y1$ wählen!)

mit left=-3 und right=guess=0 liefert $X=-2.12$ und $Y=30.11$

also $H(-2.12 / 30.11)$

Im I. Quadranten ist keine weitere Extremstelle, da $G(f')$ dort keine Nullstelle hat!

zu (3) Wendepunkte: Extrempunkte am Graphen $G(f')$ liegen an den

Wendestellen von $G(f)$:

II.Calc 3:minimum ($Y2$ wählen!) mit left=-2 und right=guess=0 liefert

$X=-1.05$ und $Y=-7.26$

Also ist $X=-1.05$ Wendestelle, die Steigung dort $f'(x_{w1})=-7.26$

durch CursorUp (damit $Y1$ gewählt!) erkennt man nun $Y=24.77$, also

$W_1(-1.05 / -24.77)$.

II.Calc 4:maximum ($Y2$ wählen!) mit left=0 und right=guess=2 liefert

$X=1.05$ und $Y=-0.24$

Also ist $X=1.05$ Wendestelle, die Steigung dort $f'(x_{w2})=-0.24$

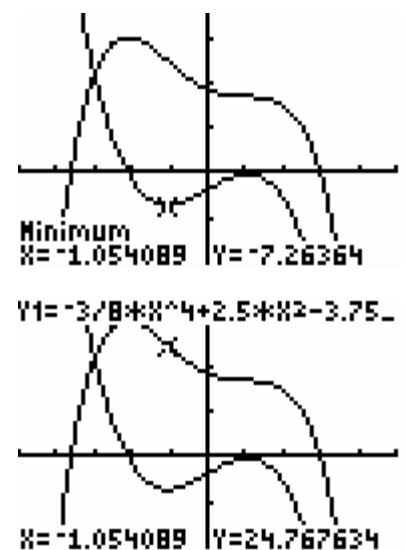
durch CursorUp (damit $Y1$ gewählt!) erkennt man nun $Y=16.86$, also

$W_2(1.05 / 16.86)$.

zu (4) Stelle mit größter Änderungsrate, also Wendestelle mit

extremster Steigung (vgl. 3):

mit $f'(x_{w2})=-0.24$ und $f'(x_{w1})=-7.26$ ist $x_{w1}=-1.05$ die gesuchte Stelle



zu (5) Wendetangenten:

Wichtig: Zuvor muss der Graph angezeigt sein, um interaktiv die Tangente zu ermitteln. Den Resultatterm jeweils GENAU notieren!

II.Draw 5:Tangent() (Y1 wählen!) und Eingabe der Wendestelle -1.054089 liefert die Tangente mit $Y=-7,26X+17,11$

II.Draw 5:Tangent() (Y1 wählen!) und Eingabe der Wendestelle 1.054086 liefert die Tangente mit $Y=-0,24X+17,11$

Ansonsten nach II.Draw 5:Tangent() in der Eingabezeile Tangent(Y1 , -1.054089) eintragen. Dann wird aber nicht die Tangentengleichung mit angezeigt.

Die Wendetangenten haben also auf der y-Achse den gemeinsamen Punkt S(0 / 17.11) (vgl. 8).



zu (6) Schnittpunkte der Wendetangenten mit dem Graphen G(f):

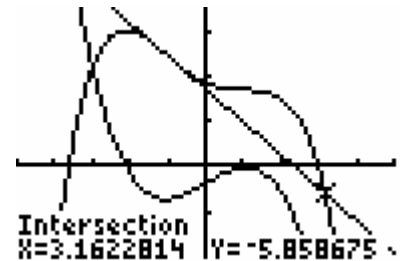
Wendetangenten-Term $t_{w1}(x)$ als $Y3=-7.2636402635X+17.111$ in Y-Editor eingeben

II.Calc 5:intersect mit First Curve Y1 und Second Y3 und guess=3 (!) liefert $S_1(3.16 / -5.86)$.

Hinweis: Ein ungünstiges guess=2 liefert nur den Wendepunkt!

Wendetangenten-Term $t_{w2}(x)$ als $Y4=-0.236359737X+17.11111$ in Y-Editor eingeben

II.Calc 5:intersect mit First Curve Y1 und Second Y4 und guess=-3 (!) liefert $S_2(-3.16 / 17.86)$



zu (7) Tangenten parallel zu den Wendetangenten:

Im Y-Editor ist als Y2 der erste Ableitungsterm bereits vorhanden.

a) Parallele Tangente zur Wendetangente t_{w1} :

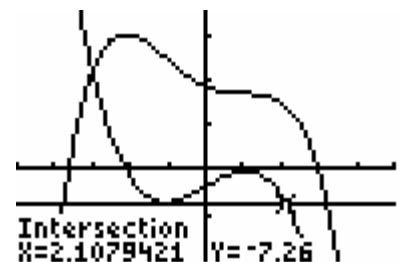
Stelle mit Wendetangenten-Steigung:

Im y-Editor zusätzlich $Y5=-7.2636402635$ eintragen

II.Calc 5:intersect mit First Curve Y2 (!) und Second Y5 und guess=2 (!) liefert $X=2.1079421$

und nach CursorUp dazu $Y=14,299$ am Graph von G(f); also den Berührungspunkt $B_1(2.11 / 14.30)$

II.Draw 5:Tangent () (Y1 wählen!) und Eingabe der Berührstelle 2.1079421 liefert die Tangente mit $Y=-7,26X+29.60$



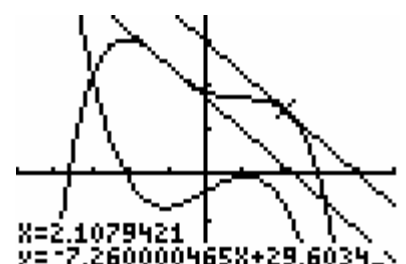
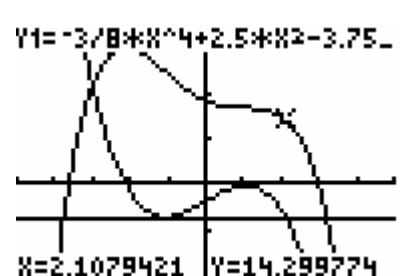
b) Parallele Tangente zur Wendetangente t_{w2} :

Stelle mit Wendetangenten-Steigung: Im y-Editor zusätzlich $Y6= -0.236359737$ eintragen

II.Calc 5:intersect mit First Curve Y2 (!) und Second Y6 und guess= -2 (!) liefert $X= -2.108185$

und nach CursorUp dazu $Y=30,109$ am Graph von G(f); also den Berührungspunkt $B_2(-2.11 / 30.11)$

II.Draw 5:Tangent () (Y1 wählen!) und Eingabe der Berührstelle -2.108185 liefert die Tangente mit $Y=-0,24X+29.61$



zu (8) Schnittpunkt beider Wendetangenten

Wie bereits unter (5) bemerkt ist dieser Schnittpunkt S(0 / 17.11).