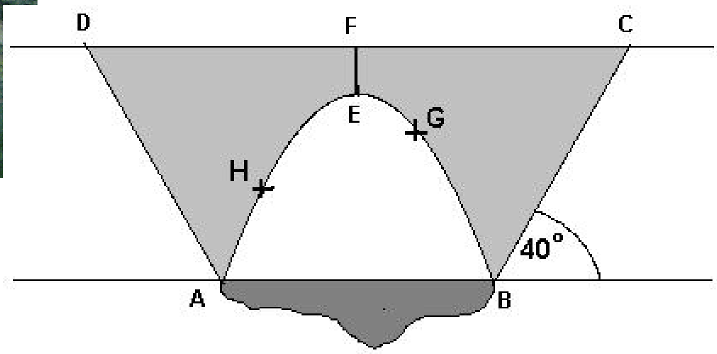
Materialpool

zur SINUS-Vergleichsklausur 12.1

am 20.12.2005



Die Aufgabensammlung wurde von den Koordinatorinnen und Koordinatoren im Projekt 2 von SINUS-Transfer NRW in Ergänzung zur Mustervergleichsklausur zusammengestellt.

Kategorie 1: Qualitative Aufgaben zur Integralrechnung

Aufgabe 1.1: *CO_2 – Gehalt in Teichen*

Die biologische Aktivität in einem Teich kann man durch die Änderungsrate beschreiben, mit der CO_2 dem Wasser zugefügt oder entnommen wird. Pflanzen entnehmen tagsüber dem Wasser im Rahmen der Photosynthese CO_2 und geben nachts CO_2 ab. Tiere geben durch die Atmung CO_2 an das Wasser ab.
Bei Tagesanbruch werden 2,6*ME* CO_2 im Teich festgestellt. (*ME* steht hier für eine nicht so ganz gebräuchliche *MengenEinheit*, in der die Stoffmenge von CO_2 gemessen werden kann.)
Biologen haben die Zu- und Abnahmerate z(t) über einen ganzen Tag, beginnend mit dem Sonnenaufgang, gemessen. Die Werte werden in der Einheit *ME* pro Stunde angegeben.

Zeit t in h	0	3	6	9	12	15	18	21	24
Änderungsrate z(t) in ME/h	0,0	-0,042	-0,037	-0,026	-0,009	0,046	0,031	0,019	0,006

a) Zeichnen Sie die Messpunkte in ein Koordinatensystem.

b) Begründen Sie, dass der Teich Pflanzen enthält.

c) Berechnen Sie für jede der angegebenen Zeiten die Gesamtmenge von CO_2 im Wasser und stellen Sie die Ergebnisse tabellarisch dar.

d) Zeichnen Sie einen Grafen, der die Entwicklung des CO_2-Gehalts während des Tages darstellt.

e) Wann war der CO_2-Gehalt am geringsten? Wie groß war er?

f) Welche Bedeutung haben die folgenden Integrale für die vorgegebene Situation?

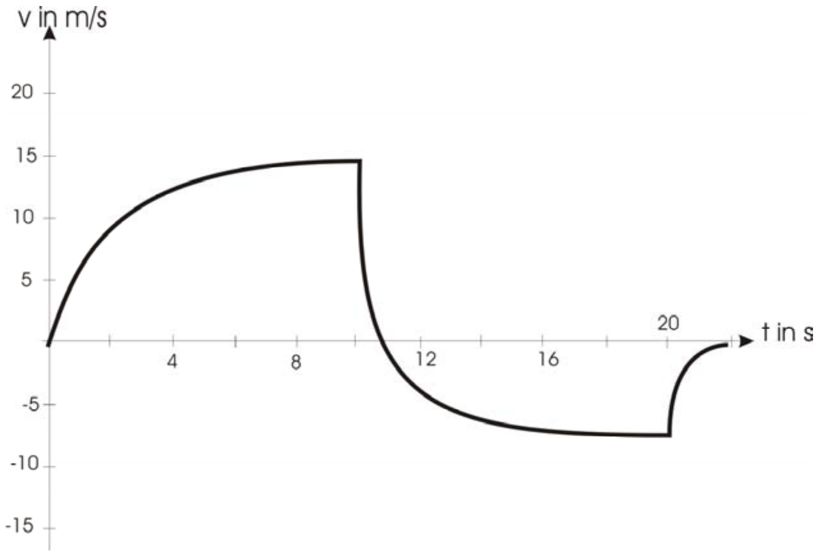
1) $\int_0^{12} z(t)dt$

2) $\int_{12}^{24} z(t)dt$

3) $\int_0^{24} z(t)dt$

Aufgabe 1.2: *Der Hubschrauberflug*

Ein Hubschrauber startet zur Zeit $t = 0s$ vom Boden. Die Geschwindigkeit des Hubschraubers in **vertikaler** Richtung wird durch das folgende Diagramm beschrieben. Dabei wird die Zeit *t* in Sekunden (*s*) und die Geschwindigkeit *v* in Meter pro Sekunde (*m/s*) angegeben.



a) Beschreiben Sie den Bewegungsablauf ohne Rechnung.
In welchen Zeitabschnitten bewegt sich der Hubschrauber nach oben bzw. unten?
Zu welchen Zeitpunkten ändert der Hubschrauber die Bewegungsrichtung?
Wann war die Steiggeschwindigkeit am größten?
Wann war die Sinkgeschwindigkeit am größten?

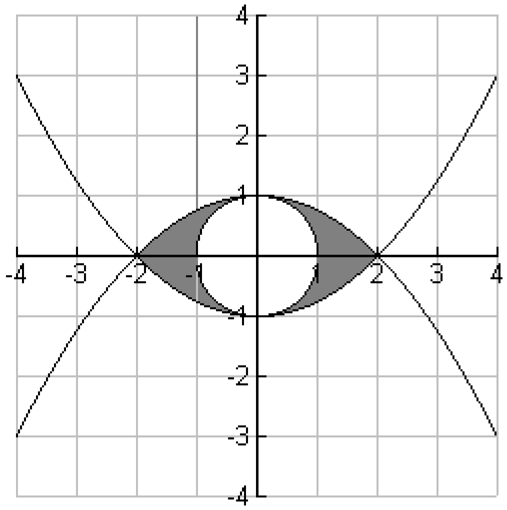
b) In welchen Zeitabschnitten des Steigflugs findet eine positive bzw. negative Beschleunigung statt?

c) Bestimmen Sie eine sinnvolle Schätzung für die nach 10 Sekunden erreichte Höhe.

d) Nach 22 Sekunden Flugzeit landet der Hubschrauber. Begründen Sie, dass der Landeplatz auf einem Hügel liegt.

Kategorie 2: Quantitative Aufgaben zur Integralrechnung

Aufgabe 2.1: *Das Auge*



Aufgabenstellung ohne CAS:

a) Berechnen Sie den Inhalt der gefärbten Fläche.
b) Wie viel Prozent des Auges entfallen auf die helle Pupille?

Aufgabenstellung mit CAS:

a) Berechnen Sie den Inhalt der gefärbten Fläche.
b) Konstruieren Sie ein Auge, bei dem die vorgegebene helle Pupille die Hälfte des Flächeninhalts ausmacht.

Aufgabe 2.2: *Beschleunigung eines Porsche 911 GT1*

Messwerte: *(aus auto motor und sport, Heft 10, 1997, S. 24)*

0 – 50 km/h	2,1 s
0 – 100 km/h	3,9 s
0 – 130 km/h	5,4 s
0 – 160 km/h	7,1 s
0 – 180 km/h	8,8 s
0 – 200 km/h	10,5 s
0 – 250 km/h	17,4 s
400 m mit stehendem Start	11,6 s
1 km mit stehendem Start	20,7 s
Höchstgeschwindigkeit 308 km/h	

a) Stellen Sie die Geschwindigkeit in Abhängigkeit von der Zeit grafisch dar.

b) Wie weit ist der Porsche beim Beschleunigen von 0 auf 250 km/h gefahren?

(1) Nehmen Sie eine erste Abschätzung durch die Voraussetzung einer konstanten Geschwindigkeit v zwischen zwei Messstellen mit Hilfe der folgenden Tabelle vor:

		Untere Abschätzung		Obere Abschätzung	
t in Sekunden	Δt in Sekunden	v in km/h	Weg s in m	v in km/h	Weg s in m
0 – 2,1					
2,1 – 3,9					
3,9 – 5,4					
5,4 – 7,1					
7,1 – 8,8					
8,8 – 10,5					
10,5 – 17,4					
Gesamtweg bis 250 km/h		**mindestens**		**höchstens**	

(2) Für eine funktionale Beschreibung der Abhängigkeit der Geschwindigkeit v (in km/h) von der Zeit t (in Sekunden) bieten sich u. a. folgende Möglichkeiten:

- $v(t) = 308\,(1 - 2^{-0{,}138t})$
- $v(t) = -0{,}7428\,t^2 + 27{,}137\,t + 1{,}4376$

Beurteilen Sie, welche der beiden Funktionen die Entwicklung der Geschwindigkeit in Abhängigkeit von der Zeit angemessener beschreibt.

(3) <u>Ohne</u> CAS:
Beschreiben Sie, wie sich die Abschätzung für den zurückgelegten Weg verbessern lässt.

<u>Mit</u> CAS:
Ermitteln Sie eine Abschätzung für den zurückgelegten Weg, wenn bis zu einer Geschwindigkeit von 250 km/h 10 gleichlange Zeitintervalle betrachtet werden.

Aufgabe 2.3: *Schadstoffeinleitung (ohne CAS)*

Jahrelang schon hatte eine Papierfabrik mit Tetrachlorkohlenstoff (CCl_4) verseuchtes Abwasser, ca. 12 m^3 pro Jahr, in einen See geleitet. Als die Umweltbehörde darauf aufmerksam wurde, musste mit dem Einbau von Filtern begonnen werden, was aber zunächst 3 Jahre keinen Erfolg zeigte, dann aber zu einer kontinuierlichen Abnahme führte. Anhand von Messungen, die 1 bzw. 2 Jahre später durchgeführt wurden, konnten die momentanen Schadstoffraten mit 6,75 bzw. 3 m^3/Jahr ermittelt werden.

a) Stellen Sie den Sachverhalt grafisch dar und beschreiben Sie die Abnahme mit Hilfe einer geeigneten Funktion.

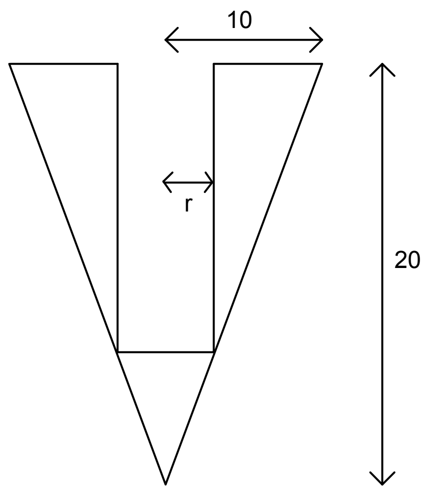
b) Ermitteln Sie rechnerisch, wie viele Kubikmeter Tetrachlorkohlenstoff in den ersten 6 Jahren nach dem Zeitpunkt der Verordnung noch in den See geleitet worden sind.

c) Erläutern Sie, mit welcher Schadstoffrate nach Ihrem Modell aus Teil (a) weitere 4 Jahre später zu rechnen ist und beurteilen Sie das Ergebnis.

Kategorie 3a: Ganzrationale Funktionen

Aufgabe 3a.1: *Die Blumenvase*

Eine Blumenvase soll hergestellt werden, indem in einen geraden Kegel ein zylindrisches Loch gebohrt wird.



Der Kegel habe einen Grundkreisradius von 10 cm und eine Höhe von 20 cm. Der eingebohrte Zylinder habe den Radius r.

Natürlich kann man in Wirklichkeit das Loch nicht ganz bis an den Kegelrand bohren. Dieses Problem sollst du aber hier vernachlässigen.

<u>Alternative ohne CAS</u>

a) Zeigen Sie, dass die folgende Formel das Volumen des einbeschriebenen Zylinders beschreibt : $V_{Zylinder} = -2\pi r^3 + 20\pi r^2$
b) Wie sollte der Radius des Bohrloches gewählt werden, damit die Wasserversorgung der Blumen in der Vase möglichst lange gewährleistet werden kann?
c) Mit wie viel Wasser kann die Vase in diesem Fall maximal befüllt werden?

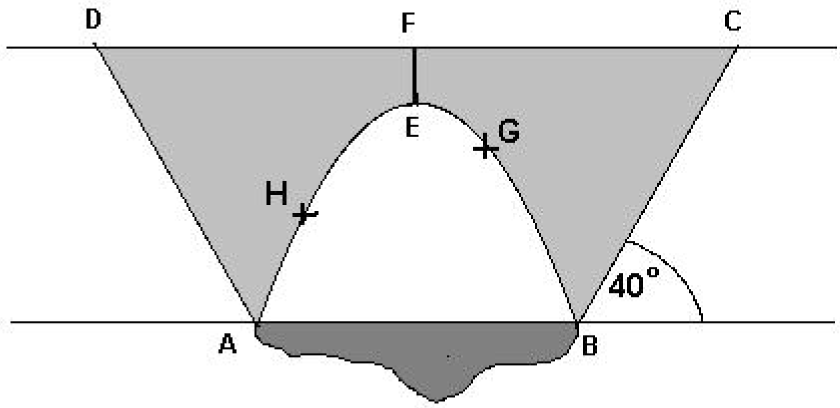
<u>Alternative mit CAS</u>

a) Zeigen Sie, dass die folgende Formel das Volumen des einbeschriebenen Zylinders beschreibt : $V_{Zylinder} = -2\pi r^3 + 20\pi r^2$
b) Wie sollte der Radius des Bohrloches gewählt werden, damit die Wasserversorgung der Blumen in der Vase möglichst lange gewährleistet werden kann?
c) Mit wie viel Wasser kann die Vase in diesem Fall maximal befüllt werden?
d) Welchen Radius sollte das Bohrloch haben, damit der Oberflächeninhalt der Vase maximale Größe erreicht ? Wie groß ist der Oberflächeninhalt in diesem Fall? Interpretieren Sie das Ergebnis unter Berücksichtigung der Ergebnisse der vorhergehenden Aufgabenteile.

Aufgabe 3a.2: ***Die Brücke***

ohne CAS:

(a) Beim Bau einer Eisenbahnlinie ist über einem Flusstal eine Brücke entsprechend der nachfolgenden Zeichnung (nicht maßstäblich) so zu errichten, dass die Gleise horizontal verlaufen.



G liegt 30 m rechts von E und 54,7 m über dem Wasserspiegel.
H liegt 50 m links von E und 37,1 m über dem Wasserspiegel.

Die Länge der Strecke $\overline{EF}$ soll aus Stabilitätsgründen 3 m betragen.

(i) Ermitteln Sie eine Gleichung für den Parabelbogen AEB
(mögliche Lösung: $y = -0{,}011x^2 + 64{,}6$).

(ii) Berechnen Sie die Breite des Flusses.

(b) Einige Kilometer weiter verläuft die Bahnstrecke auf einem Erdwall. Hier soll unter der Bahnstrecke ein Abwassertunnel gemauert werden, dessen Querschnittsfläche die Form eines Rechtecks mit aufgesetztem Halbkreis erhalten soll. Die Umrahmung soll dabei insgesamt 6 m betragen.
Zeigen Sie, dass für die Querschnittsfläche in Abhängigkeit vom Radius r gilt:
$A(r) = -0{,}5\pi r^2 + 6r - 2r^2$ und ermitteln Sie die Maße für diesen Abwassertunnel, wenn die Querschnittsfläche möglichst groß sein soll.

mit CAS:

Die Abbildung zeigt einen Träger einer alten Skischanze.

(a) Ermitteln Sie anhand der Abbildung einen ungefähren Wert für die lichte Höhe des Trägers.

(b) Der bogenförmige Teil des Trägers kann näherungsweise als Teil einer Parabel oder Teil eines Kreises aufgefasst werden. Ermitteln Sie jeweils eine geeignete Funktionsgleichung.

(c) Beurteilen Sie, welche Näherung angemessener ist.

(d) Berechnen Sie das Gewicht des sichtbaren Teils eines Trägers, wobei davon auszugehen ist, dass der bogenförmige Teil des Trägers als Teil eines Kreises aufgefasst wird und der ganze Träger eine quadratische Querschnittsfläche mit 50 cm Kantenlänge besitzt. Die Dichte von Beton beträgt 2,4 t / m^3.

Kategorie 3b: Exponentialfunktionen

Aufgabe 3b.1: *Altersbestimmungen mittels des Zerfalls radioaktiver Isotope*

Pflanzliche (und tierische) Zellen nehmen neben normalem Kohlenstoff auch radioaktiven Kohlenstoff ^{14}C auf. Wenn die Pflanze stirbt, wird kein weiterer Kohlenstoff aufgenommen und der ^{14}C-Gehalt sinkt jährlich um etwa 0,0121 % durch Zerfall. Damit ist es möglich, für Hölzer und andere Materialien pflanzlichen Ursprungs Altersbestimmungen durch Messung des ^{14}C-Gehaltes vorzunehmen ("Radiokarbonmethode").

Dazu einige Beispiele:

- Jesaja, einer der großen Propheten des Alten Testaments, hat im 8. Jahrhundert v. Chr. gelebt. Am historischen Exemplar des "Buches von Jesaja" hat man noch einen ^{14}C -Gehalt von 78,4 % gemessen.
- Das berühmte Turiner „Leichentuch Christi“ wurde 1988 mit der Radiokarbonmethode untersucht. Danach konnte es höchstens 728 Jahre alt sein.

Aufgaben:

a) Stellen Sie einen Funktionsterm für den radioaktiven Zerfall von ^{14}C – Atomen zum Anfangswert: a auf und leiten Sie auch eine Darstellung in der Form $f(t) = a \cdot e^{-kt}$ her.

b) Bestimmen Sie die Halbwertzeit des Isotops ^{14}C.

c) Warum enthält das Buch Jesaja radioaktives ^{14}C ? Kann es das persönliche Exemplar des Propheten gewesen sein?

d) Wie viel Prozent der ursprünglichen ^{14}C – Konzentration haben die Wissenschaftler noch im Turiner Grabtuch gemessen?

e) Berechnen Sie die momentane Zerfallsgeschwindigkeit der ^{14}C -Atome im Turiner Tuch zum Zeitpunkt t = 500 und im Jahr 1988.

f) Die Radiokarbonmethode funktioniert nur dann, wenn mindestens noch 1% der ursprünglichen Menge ^{14}C vorhanden ist. Wie alt darf organisches Material höchstens sein, wenn es nach dieser Methode untersucht werden soll?

g) Es gibt noch weitere Altersbestimmungsmethoden, die auf der Untersuchung radioaktiver Stoffe beruhen. Als Beispiel finden Sie unten einen Bericht über die Altersbestimmung des Grundwassers unter der Sahara. Bestimmen Sie die Zerfallsrate für Krypton 81.

Uraltes Wasser unter der Sahara

Washington, (dpa) Das Grundwasser unter der Sahara ist einer internationalen Studie zufolge bis zu einer Million Jahre alt.

Die Forscher hatten Grundwasser unter Ägypten und Libyen untersucht. Es fließe langsam in einem unterirdischen System von Nubien aus mit einer Geschwindigkeit von nur ein bis zwei Metern pro Jahr nordwärts, berichtete der US-Verband American Geophysical Union in Washington. Die Forscher um Neil Sturchio von der Universität von Illinois in Chicago nutzten für ihre neuartige Datierung das extrem seltene radioaktive Isotop Krypton 81. Von diesen Atomen zerfällt innerhalb von 229 000 Jahren jeweils die Hälfte, so dass es sich als Uhr für lange Zeiträume nutzen lässt. Die Forscher hoffen, damit auch das Alter von Gletschern bestimmen zu können.

Frankfurter Rundschau 2.3.2004

Aufgabe 3b.2: *Bevölkerungswachstum*

In der Frankfurter Rundschau vom 17.1.94 war zu lesen:

Ein Land erstickt an Menschen - *Pakistan tut zu wenig gegen die Bevölkerungsexplosion*

(...) *Im islamischen Pakistan wächst die Bevölkerung ungehindert. Sie wächst so schnell, dass seit dem vergangenen Jahr Nahrungsmittel eingeführt werden müssen für teure Devisen, die das Land nicht hat. Das Bevölkerungswachstum ist Pakistans Problem Nummer eins. Es liegt derzeit bei 3,2 Prozent im Jahr. Es ist das höchste in Südostasien und wahrscheinlich ist die Zahl auch noch geschönt. Wenn das so weiter geht, wird Pakistan demnächst auf Platz 3 der bevölkerungsreichsten Staaten der Erde liegen (...) Bangladeshs 120 Mio. hat Pakistan mit 124 Mio. schon 1993 überholt ....*

a) Woran erkennt man mathematisch einen exponentiellen Prozess?

b) Bestimme für die Bevölkerungsentwicklung in Pakistan die Wachstumsrate und den Wachstumsfaktor für das Jahr 1993. Berechne die voraussichtliche Bevölkerungszahl für Pakistan im Jahr 2020 - wenn die Entwicklung so weitergeht.

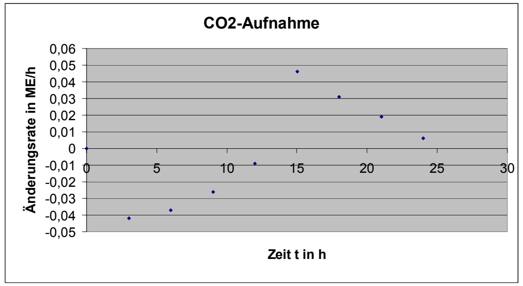
c) Warum sind solche Berechnungen mit einem großen Fragezeichen zu versehen?

d) Berechne die Verdoppelungszeit der pakistanischen Bevölkerung unter den bekannten Bedingungen von 1993.

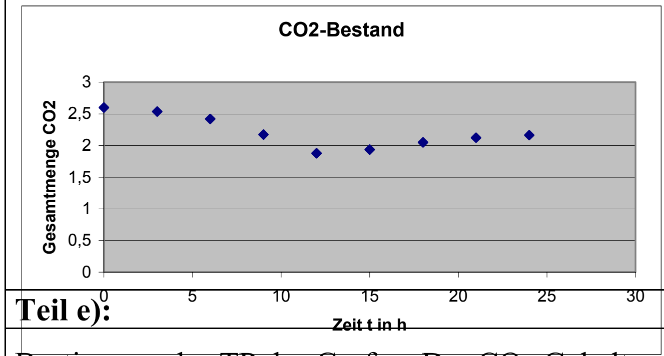
e) Dem CIA - The World Factbook[1] kann man entnehmen, dass Bangladesh 2004 eine Bevölkerungszahl von 159,196 Mio. Menschen hatte.
Wie groß war die durchschnittliche jährliche Wachstumsrate im Zeitraum zwischen 1993 und 2004?
Wie erklärt sich der Unterschied zur dort angegebenen Wachstumsrate von 1,98 % für 2004 ?

[1] http://www.odci.gov/cia/publications/factbook/geos/pk.html

Erwartungshorizont zur Aufgabe 1.1 "CO_2-Gehalt in Teichen" (Integralrechnung)

Skizzierung der Lösung	Anforderungsbeschreibung	TR	CAS
Teil a):			
Zeichnen eines Diagramms. 	S. stellen Messwerte grafisch dar.		
Teil b):			
Der Teich enthält Pflanzen, da nur so die negativen Änderungsraten von Sonnenaufgang bis Sonnenuntergang erklärt werden können.	S. werten die gegebenen Messwerte aus und interpretieren positive und negative Änderungsraten		
Teil c):			
Näherungsweise Berechnung der Flächeninhalte z.B. über Rechteck- oder Trapezsummen mit diskreten Werten. Aufstellen einer Tabelle.	S. interpretieren das Integral als Wirkung, hier als enthaltene Gesamtmenge, berechnen die zugehörigen Flächeninhalte und stellen eine Tabelle auf.	Der Einsatz der verschiedenen Rechner bringt hier keinen wesentlichen Vorteil.	

Zeit t in h	0	3	6	9	12	15	18	21	24
Gesamtmenge CO2	2,6	2,5	2,4	2,2	1,88	1,9	2,05	2,1	2,2

Skizzierung der Lösung	Anforderungsbeschreibung	TR	CAS
Teil d):			
Zeichnen des zugehörigen Grafen 	S. stellen die berechneten Werte grafisch dar.		
Teil e):			
Bestimmen des TP des Grafen: Der CO_2-Gehalt war nach ca. 12,5 h am geringsten (etwa 1,88 ME).	S. übersetzen das gegebene grafische Modell in die reale Situation.		
Teil f):			
1) Die Fläche liegt unterhalb der 1.Achse, also wurde im betreffenden Zeitraum mehr CO_2 entnommen als abgegeben, der Gesamtbestand ist gesunken. 2) Die Fläche liegt oberhalb der 1.Achse, also wurde im betreffenden Zeitraum mehr CO_2 abgegeben als entnommen, der Gesamtbestand ist also gestiegen. 3) Das Integral gibt an, wie viel CO_2 nach 24 Stunden im Vergleich zum Anfangsbestand hinzugekommen ist bzw. entnommen wurde.	S. interpretieren das Integral als Bilanzierung von Flächeninhalten		

Erwartungshorizont zur Aufgabe 1.2 "Der Hubschrauberflug" (Integralrechnung)

<table>
<tr><th>Skizzierung der Lösung</th><th><u>Anforderungsbeschreibung</u></th><th>TR</th><th>CAS</th></tr>
<tr><td colspan="4">Teil a):</td></tr>
<tr><td>• G(f) oberhalb 1. Achse: H. bewegt sich nach oben $0 \le t \le 11$
• G(f) unterhalb 1. Achse: H. bewegt sich nach unten $11 \le t \le 22$
• Schnittpunkte von G(f) mit 1. Achse: dort Änderung der Bewegungsrichtung: $t = 11$
• HP von G(f): größte Steiggeschwindigkeit ($t = 10$)
• TP von G(f): größte Sinkgeschwindigkeit ($t = 20$)</td><td>Gegebenes grafisches Modell in die reale Situation des Hubschraubers übersetzen</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>Teil b):</td><td></td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>• positive Steigung von G(f): positive Beschleunigung $0 \le t \le 10$
• negative Steigung von G(f): negative Beschleunigung $10 \le t \le 11$</td><td>Qualitatives Differenzieren des Graphen; Beschleunigung als Änderungsrate der Geschwindigkeit</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="4">Teil c):</td></tr>
<tr><td>Näherungsweise Berechnung z.B. über Rechteck- oder Trapezsummen ergibt eine Höhe von ca. 108m.
Denkbar wäre auch eine Argumentation mit der ungefähren mittleren Geschwindigkeit (etwa 10 m/s). Damit ergibt sich eine Höhe von 100m.</td><td>Interpretation des Integrals als Wirkung, hier konkret zurückgelegte Höhe</td><td colspan="2">Die Schüler können hier den Lösungsweg selbst wählen.
Der Einsatz eines CAS bietet keine wesentlichen Vorteile gegenüber dem TR.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Teil d):</td></tr>
<tr><td>Flächeninhalt oberhalb der 1. Achse ist größer als der unterhalb der 1. Achse, d.h. die zurückgelegte Strecke nach oben ist größer als die nach unten.</td><td>Interpretation des Integrals als Bilanzierung von Flächeninhalten</td><td colspan="2"></td></tr>
</table>

Erwartungshorizont zur Aufgabe 2.1 "Das Auge" (Integralrechnung)

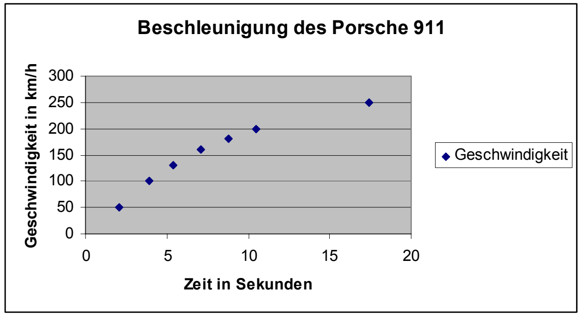
<table>
<tr><th>Skizzierung der Lösung</th><th><u>Anforderungsbeschreibung</u></th><th>TR</th><th>CAS</th></tr>
<tr><td colspan="4">Teil a):</td></tr>
<tr><td>Aufstellen der Funktionsterme der Parabeln :
$f_1(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 1$; $f_2(x) = \frac{1}{4}x^2 - 1$</td><td>S. modellieren die Umrandung einer vorgegebenen Figur mit Hilfe von Funktionstermen</td><td colspan="2">Der Lösungsweg kann hier frei vom S gewählt werden: z.B. durch Interpretation des Graphen, durch Linearfaktorzerlegung bzw. Aufstellen von Gleichungssystemen</td></tr>
<tr><td>Zerlegung der Gesamtfläche des Auges als Differenzfläche zweier Teilflächen evtl. unter Berücksichtigung von Symmetrien</td><td>S. zerlegen komplexe Probleme in Teilprobleme</td><td colspan="2" rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>Inhalt der Kreisfläche berechnen: $A_k = \pi r^2$</td><td>S. wenden elementare Geometriekenntnisse an</td></tr>
<tr><td>Inhalt der Fläche zwischen den Parabeln mittels Integralen evtl. unter Berücksichtigung von Symmetrien:
$A_{ges} = \frac{16}{3}$ FE</td><td>S. wenden das bestimmten Integrals zur Flächenberechnung an</td><td>Berechnung des bestimmten Integrals</td><td>exakte Berechnung des bestimmten Integrals mittels CAS</td></tr>
<tr><td>Berechnung des Inhaltes der gefärbten Fläche als Differenz $A = \frac{16}{3} - \pi \approx 2{,}19$ FE</td><td></td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="4">Teil b) <u>ohne</u> CAS:</td></tr>
<tr><td>prozentualer Anteil $A_k : A_{ges} = 58{,}9\ \%$</td><td>S. wenden elementare Kenntnisse der Prozentrechnung an</td><td></td><td></td></tr>
</table>

Skizzierung der Lösung	Anforderungsbeschreibung	TR	CAS
Teil b) mit CAS:			
Lösungsalternative 1: $f_a(x) = -ax^2 + 1$; Nullstellen: $-\frac{1}{\sqrt{a}}$; $\frac{1}{\sqrt{a}}$ $\int_{-\frac{1}{\sqrt{a}}}^{\frac{1}{\sqrt{a}}} f_a(x)dx = \frac{4}{3\sqrt{a}}$; $\frac{4}{3\sqrt{a}} = \pi \Leftrightarrow a = \frac{16}{9\pi^2}$ Lösungsalternative 2: $f_a(x) = a(x-2)(x+2) = a(x^2 - 4)$ $\int_{-2}^{2} f_a(x)dx = -\frac{32}{3}a$; $-\frac{32}{3}a = \pi \Leftrightarrow a = -\frac{3}{32}\pi$	S. finden eine angemessene funktionale Modellierung eines Sachverhaltes; S. setzen die Modellierung in einen algebraischen Lösungsansatz um und bestimmen den Parameter mit Hilfe des bestimmten Integrals		Berechnung des bestimmten Integrals in Abhängigkeit vom Parameter a

Erwartungshorizont zur Aufgabe 2.2 " Beschleunigung eines Porsche 911 GT1" (Integralrechnung)

Skizzierung der Lösung	<u>Anforderungsbeschreibung</u>	TR	CAS

Teil a):



S. stellen Messwerte grafisch dar

Die Werte können direkt der Tabelle entnommen werden.

Teil b1):

		Untere Abschätzung		Obere Abschätzung	
t in Sek.	Δt in Sek.	v in km/h	Weg s in m	v in km/h	Weg s in m
0 – 2,1	2,1	0	0	50	29,2
2,1 – 3,9	1,8	50	25	100	50
3,9 – 5,4	1,5	100	41,7	130	54,2
5,4 – 7,1	1,7	130	61,4	160	75,6
7,1 – 8,8	1,7	160	75,6	180	85
8,8 – 10,5	1,7	180	85	200	94,4
10,5 – 17,4	6,9	200	383,3	250	479,2
Gesamtweg bis 250 km/h		**mindestens 672m**		**höchstens 867,6m**	

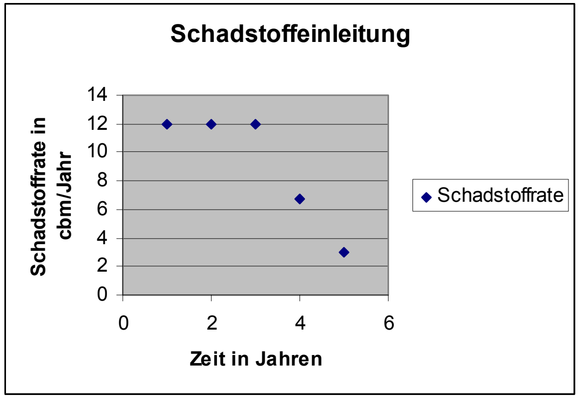
S. zerlegen Probleme in Teilprobleme

S. analysieren Daten realer Bewegungsabläufe

S. interpretieren Tabellen

Skizzierung der Lösung	Anforderungsbeschreibung	TR	CAS
Teil b2):			
Beurteilungskriterien: Wertetabelle (Abweichung der Daten) Graf der Funktionen (Abweichung des gezeichneten Grafen in Teil (a) Beschreibung des Geschwindigkeitsverlaufs bis zur Höchstgeschwindigkeit	S. beurteilen vorgegebene Modelle anhand der Eigenschaften ganzrationaler Funktionen und Exponentialfunktionen und verwenden die Modelle für eine Prognose	Anfertigung von Wertetabellen zum Vergleich mit der vorgegebenen Tabelle	Grafen der beiden Funktionen zum Vergleich mit (a), ggf. Wertetabelle
Teil b3): ohne CAS			
Verkleinerung der Zeitintervalle Bestimmung der jeweiligen Geschwindigkeiten mit Hilfe einer geeigneten Näherungsfunktion Berechnung des in den einzelnen Intervallen min. und max. zurückgelegten Weges mit Hilfe von $s = v \cdot t$ Addition der Teilergebnisse	S. benutzen die zentrale Idee des Integrals als Summe S. erkennen den zurückgelegten Weg als „Wirkung“ der Geschwindigkeit		
Teil b3): mit CAS			
Berechnung mit Hilfe von $v(t) = 308\,(1 - 2^{-0{,}138t})$: $\sum_{i=0}^{9}(v(i \cdot 1{,}74)) \cdot 1{,}74 \div 3{,}6 = 701{,}5$ $\sum_{i=1}^{10}(v(i \cdot 1{,}74)) \cdot 1{,}74 \div 3{,}6 = 822{,}2$	S. berechnen Ober- und Untersummen		Exakte Berechnung der Ober- und Untersummen

Erwartungshorizont zur Aufgabe 2.3 "Schadstoffeinleitung" (Integralrechnung)

Skizzierung der Lösung	Anforderungsbeschreibung	TR	CAS
Teil a):			
	S. stellen Messwerte grafisch dar	Die Werte können direkt dem Text entnommen werden.	
Auswahl einer geeigneten Funktion, deren Graph die Schadstoffeinleitung für $t \geq 3$ beschreibt: Keine Exponentialfunktion (Schadstoffeinleitung endet irgendwann) Ganzrationale Funktion 2. Grades	Offene Aufgabenstellung (Funktionstyp nicht vorgegeben) S. zerlegen ein komplexes Problem in Teilprobleme, und wählen begründet eine geeignete Funktion zur Modellierung realer Daten aus		
$y = ax^2 + bx + c$ I. $12 = 9a + 3b + c$ II. $6{,}75 = 16a + 4b + c$ III. $3 = 25a + 5b + c$	S. stellen ein LGS auf, indem sie die gewählte Funktion auf reale Daten anwenden		

Skizzierung der Lösung	Anforderungsbeschreibung	TR	CAS
II. – I.: -5,25 = 7a + b III. – II.: -3,75 = 9a + b Subtraktion ergibt 2a = 1,5 also a = 0,75 → b = - 10,5 und c = 36,75 **$y = 0{,}75x^2 – 10{,}5x + 36{,}75 = f(x)$**	Ohne CAS: S. lösen ein LGS mit Hilfe geeigneter Verfahren Mit CAS: Lösen eines LGS		Lösen des LGS
Teil b):			
Schadstoffmenge: $3 \cdot 12 + \int_3^6 (0{,}75x^2 - 10{,}5x + 36{,}75)dx = 51{,}75$	S. erkennen den Zusammenhang zwischen der Schadstoffmenge (als Wirkung) und dem Flächeninhalt S. berechnen ein bestimmtes Integral	Berechnung des bestimmten Integrals	Exakte Berechnung des bestimmten Integrals mit CAS
Teil c):			
Schadstoffrate nach 10 Jahren: f(10) = 6,75 Der Anstieg der Schadstoffrate ist bei der Verwendung der Filter nicht zu erwarten. Das Modell beschreibt die Entwicklung nur in den ersten 7 Jahren (f(7) = 0).	S. berechnen die Schadstoffrate, also den Funktionswert und beurteilen das Ergebnis mit Blick auf die gegebene Situation		

Erwartungshorizont zur Aufgabe 3a.1 "Die Blumenvase" (ganzrationale Funktionen) –**ohne CAS** –

Skizzierung der Lösung	Anforderungsbeschreibung	TR
Teil a) :		
Unter Verwendung des Strahlensatzes kann der gegebene Zusammenhang hergeleitet werden : Strahlensatz : $\frac{20-h}{20} = \frac{r}{10} \Rightarrow h = 20 - 2r$ $V_{Zylinder} = \pi\, r^2\, h = \pi\, r^2\,(20 - 2r) = -2\,\pi\, r^3 + 20\,\pi\, r^2$	Schüler sollen aus den gegebenen Informationen einen Funktionsterm aufstellen	
Teil b) :		
$V'_{Zylinder} = -6\,\pi\, r + 40\,\pi\, r$ $V'_{Zylinder} = 0 \;\Rightarrow\; r = 20/3$ Mittels Vorzeichenbetrachtung Nachweis des Maximums	Schüler sollen ein reales Problem in ein mathematisches Optimierungsproblem übertragen und Kenntnisse über Lösungsverfahren bei Extremwertproblemen anwenden	
Teil c) :		
$V_{Zylinder}\,(20/3) = 930{,}84$	Schüler sollen den Funktionswert einer gegebenen Funktion an einer bestimmten Stelle ausrechnen	Elementare Berechnungen

Erwartungshorizont zur Aufgabe 3a.1 "Die Blumenvase" (Exponentialfunktionen) –<u>mit CAS</u>

Skizzierung der Lösung	Anforderungsbeschreibung	CAS
Teil a) :		
Unter Verwendung des Strahlensatzes kann der gegebene Zusammenhang hergeleitet werden : Strahlensatz : $\frac{20-h}{20}=\frac{r}{10} \Rightarrow h=20-2r$ $V_{Zylinder} = \pi r^2 h = \pi r^2 (20 - 2r) = -2\pi r^3 + 20\pi r^2$	Schüler sollen aus den gegebenen Informationen einen Funktionsterm aufstellen	
Teil b) :		
$V'_{Zylinder} = -6\pi r + 40\pi r$ $V'_{Zylinder} = 0 \Rightarrow r = 20/3$ Nachweis des Maximums mittels zweiter Ableitung	<u>Schüler sollen ein reales Problem strukturieren und Funktionen untersuchen (Extremwertuntersuchung)</u>	Exakte Ermittlung des Maximums mittels CAS
Teil c) :		
$V_{Zylinder}(20/3) = 930{,}84$	Schüler sollen den Funktionswert einer gegebenen Funktion an einer bestimmten Stelle ausrechnen	
Teil d) :		
$O_{Zylinder} = \pi r^2 + 2\pi r h = -3\pi r^2 + 40\pi r$ $O`_{Zylinder} = 0 \Rightarrow r = 20/3$ Nachweis des Maximums mittels zweiter Ableitung $O_{Zylinder}(20/3) = 418{,}88$	Schüler sollen ein reales Problem strukturieren, eine Funktionsgleichung aufstellen und diese auf Extremstellen untersuchen	Exakte Ermittlung des Maximums mittels CAS

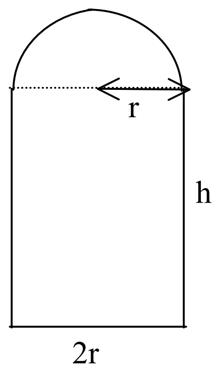
Erwartungshorizont zur Aufgabe 3a.2 "Die Brücke" (ganzrationale Funktionen) –**ohne CAS** –

Skizzierung der Lösung	Anforderungsbeschreibung	TR	Punkte
Teil a) :			
Teil (i): Ansatz nach geeigneter Wahl des Koordinatensystems (x-Achse durch A und B ; y-Achse durch E bzw. F): $y = ax^2 + b$; $(a<0 ; b>0)$ G und H liegen auf der Parabel $\Rightarrow$ $54{,}7 = a \cdot 900 + b \wedge 37{,}1 = a \cdot 2500 + b$ Subtraktion der beiden Gleichungen $\Rightarrow$ $-17{,}6 = 1600\,a \Rightarrow a = -0{,}011$ Einsetzen in die 1. Gleichung $\Rightarrow 54{,}7 = -9{,}9 + b$ $\Rightarrow b = 64{,}6$ $\Rightarrow y = -0{,}011\,x^2 + 64{,}6$ ist die Gleichung der gesuchten Parabel.	Schüler sollen aus den gegebenen Informationen einen Funktionsterm aufstellen bei geeigneter Wahl eines Koordinatensystems	Rechenhilfe zur Lösung des linearen Gleichungssystems	6
Teil (ii) Nullstellenbestimmung: $-0{,}011\,x^2 + 64{,}6 = 0 \Rightarrow$ $x = 76{,}63 \vee x = -76{,}63$ Flussbreite $\overline{AB} = 2 \cdot 76{,}63$ m $= 153{,}26$ m	Schüler nutzen die Bedeutung der Nullstellen für die Lösung eines realen Problems	Lösung der quadratischen Gleichung	2

<table>
<tr><th>Skizzierung der Lösung</th><th><u>Anforderungsbeschreibung</u></th><th>TR</th><th>Punkte</th></tr>
<tr><td colspan="4">Teil b) :</td></tr>
<tr><td>Querschnittsfläche $A = 0{,}5\,\pi r^2 + 2rh = f(r;h)$
Nebenbedingung : $6 = 2r + h + h + \pi r \Rightarrow$
$h = 3 - r - 0{,}5\pi r$
Einsetzen in f(r;h) ergibt:
$A = 0{,}5\,\pi r^2 + 6r - 2\,r^2 - \pi r^2$
$= -\,0{,}5\pi r^2 + 6r - 2\,r^2 = f(r)$
$f'(r) = -\,\pi r + 6 - 4r$
$0 = -\,\pi r + 6 - 4r \Rightarrow r = \frac{6}{4+\pi}$
$f''(r) = -\,\pi - 4 < 0 \Rightarrow$ rel. Max. bei $r \approx 0{,}84$ m
$f(0{,}84) = 2{,}52$

Definitionsbereich:
$0 < r < \frac{6}{\pi+2}$

Randwerte: $f(0) = 0$;
$f(\frac{6}{\pi+2}) = 2{,}14$

$\Rightarrow h \approx 0{,}84$ m


Für $r = h \approx 0{,}84$ m ist der Inhalt der Querschnittsfläche maximal, nämlich $2{,}52\ m^2$.</td><td>Schüler sollen ein reales Problem in ein mathematisches Optimierungsproblem übertragen und Kenntnisse über Lösungsverfahren bei Extremwertproblemen anwenden</td><td>TR als Hilfsmittel für elementare Berechnungen</td><td>12</td></tr>
<tr><td colspan="3" align="right">Gesamtpunktzahl Aufgabe 3:</td><td>20</td></tr>
</table>

Erwartungshorizont zur Aufgabe 3a.2 "Die Brücke" (ganzrationale Funktionen) –mit CAS –

<table>
<tr><th>Skizzierung der Lösung</th><th>Anforderungsbeschreibung</th><th>CAS</th><th>Punkte</th></tr>
<tr><td colspan="4">Teil a) :</td></tr>
<tr><td>Lichte Höhe in cm gemessen: 4,5 cm
(nach rechts abfallender Weg unter dem Träger)

Maßstab: 1,3 cm entsprechen 1,60 m (Frau)
Lichte Höhe real: 5,50 m</td><td>S. bestimmen Entfernungen mit Hilfe eines selbst gewählten Maßstabs</td><td></td><td>4</td></tr>
<tr><td colspan="4">Teil b) :</td></tr>
<tr><td>Parabel für $-2,2 \leq x \leq 2,2$
Ursprung des Koordinatensystems im Scheitelpunkt des Trägers; Betrachtung der Trägerunterkante
<table>
<tr><td>x</td><td>+/- 1</td><td>+/- 1,5</td><td>+/- 2</td><td>+/- 2,2</td></tr>
<tr><td>Y</td><td>- 0,2</td><td>-0,6</td><td>-1,2</td><td>- 1,5</td></tr>
</table>

$f(x) = -0,34x^2 + 0,15$

Kreisbogen für $-2,2 \leq x \leq 2,2$
Daten wie oben
$x^2 + (y + r)^2 = r^2$ mit $r = 2,25$</td><td>S. ermitteln in der Abbildung die Koordinaten einiger Punkte

S. stellen die Kreisgleichung auf (evtl. mit Hilfe des Satzes von Pythagoras)</td><td>Grafische Darstellung der Messpunkte und Ermittlung der Regressionskurve

Grafische Darstellung der Messpunkte und des Kreises</td><td>8</td></tr>
<tr><td colspan="4">Teil c) :</td></tr>
<tr><td>Der Kreis beschreibt mit Ausnahme des letzten Punktes (2,2/-1,5) den Bogen angemessen, der Scheitelpunkt der Parabel liegt dagegen höher als der Scheitelpunkt des Trägers auf dem Foto.</td><td>S. beurteilen zwei unterschiedliche Modellierungen mit Blick auf reale Messwerte</td><td></td><td>3</td></tr>
</table>

Skizzierung der Lösung	Anforderungsbeschreibung	CAS	Punkte
Berechnung der Kreisbogenlänge: $b = \frac{2\pi r \cdot 2\alpha}{360^o}$ mit r = 2,25 cm und $\alpha = 71^o$, da $\tan\alpha = \frac{2{,}2cm}{2{,}25cm - 1{,}5cm}$ → b = 5,6 cm Schenkellänge auf dem Foto ausgemessen: 3,8 cm + 2,8 cm = 6,6 cm Gesamtlänge des Trägers: 12,2 cm Mit Maßstab umgerechnet (s.o.) 15m (real) Querschnittefläche: 2500 cm^2 Volumen: 3,75 m^3 Gewicht: 9 t	S. wenden elementare Geometriekenntnisse an (Kreisbogenlänge, Winkelsätze im rechtwinkligen Dreieck) und ermitteln Entfernungen mit Hilfe eines selbst gewählten Maßstabs	Elementare Rechenhilfe	5
		Gesamtpunktzahl Aufgabe 3:	**20**

Erwartungshorizont zur Aufgabe 3b.1 "Altersbestimmungen" (Exponentialfunktionen)

Skizzierung der Lösung	Anforderungsbeschreibung	TR	CAS
Teil a):			
$f(t) = a \cdot 0{,}999879^{\,t} \Leftrightarrow f(t) = a \cdot e^{-\ln\frac{1}{0{,}999879}\cdot t}$ $\Leftrightarrow f(t) = a \cdot e^{-0{,}000121\,t}$	Textverständnis, Kenntnisse über die verschiedenen Darstellungen von Exponentialfunktionen	Algebraische Umformung unter Anwendung der entsprechenden Zusammenhänge und Gesetze	
Teil b):			
$f(t) = \frac{1}{2}a \Leftrightarrow t \approx 5\,728{,}5$ (Jahre)	Lösen einer einfachen Exponentialgleichung	Ermittlung der Halbwertzeit	exakte algebraische Ermittlung der Halbwertzeit mit CAS
Teil c):			
Papyrus (= aus getrockneter 'Papier'staude gewonnenes Schreibmaterial) $f(t) = 0{,}784\,a \Leftrightarrow t \approx 2\,011{,}1$ (Jahre) Somit deutlich jünger als Jesaja.	Allgemeinwissen, Textverständnis, Lösen einer einfachen Exponentialgleichung	Lösung der Exponentialgleichung	exakte algebraische Lösung der Exponentialgleichung mit CAS
Teil d):			
$f(728) \approx 0{,}9157\,a$, also sind 1988 noch 91,57 % der ursprünglichen ^{14}C-Isotopen vorhanden gewesen.	Textverständnis, Berechnung eines Funktionswertes		
Teil e):			
$f'(t) = -0{,}000121a \cdot e^{-0{,}000121\,t}$ $f'(500) \approx -0{,}000114\,a$ $f'(728) \approx -0{,}000111\,a$ also momentane Zerfallsgeschwindigkeiten: $v(500) \approx 0{,}0114\,\%$ und $v(728) \approx 0{,}0111\,\%$	Interpretation der 1. Ableitung der Zerfallsfunktion als momentane Zerfallsgeschwindigkeit	Bildung der 1. Ableitung mittels Ableitungsregeln für Exponentialfunktionen	Bildung der 1. Ableitung mittels CAS

Skizzierung der Lösung	Anforderungsbeschreibung	TR	CAS
Teil f):			
$f(t) = 0{,}01a \Leftrightarrow t \approx 38\,059{,}3$ (Jahre)	Textverständnis, Lösen einer einfachen Exponentialgleichung	Lösung der Exponentialgleichung	exakte algebraische Lösung der Exponentialgleichung mit CAS
Teil g):			
$b^{229\,000} = 0{,}5 \Leftrightarrow b = 0{,}999\,997$, also sinkt der Krypton 81 - Anteil jährlich um 0,0003 %.	Textverständnis, Lösen einer einfachen Exponentialgleichung	algebraische Lösung der Exponentialgleichung	algebraische Lösung der Exponentialgleichung mit CAS

Erwartungshorizont zur Aufgabe 3b.2 "Bevölkerungswachstum" (Exponentialfunktionen)

Skizzierung der Lösung	<u>Anforderungsbeschreibung</u>	TR	CAS
Teil a):			
Der Quotient $\frac{f(t+1)}{f(t)}$ zweier zeitlich aufeinanderfolgender (Mess-)werte ist bei den gegebenen Daten (annähernd) konstant. Dieser konstante Wert ist der Wachstums-(bzw. Zerfalls-)faktor b. Der exponentielle Prozess kann daher durch eine Wachstums- (bzw. Zerfalls-)funktion f mit $f(t) = a \cdot b^t$ beschrieben werden, wobei a der Anfangsbestand zum Zeitpunkt t = 0 ist. [*evtl. Erweiterung je nach unterrichtlicher Behandlung:* Hinweis auf Beschreibung in der Form $f(t) = a \cdot e^{k \cdot t}$ mit $k = \ln b$ (sog. Wachstumskonstante)]	Verständnis der Merkmale exponentieller Prozesse und deren Beschreibung durch Exponentialfunktionen Fähigkeit dies angemessen zu verbalisieren		
Teil b):			
<u>1993:</u> Wachstumsrate: 3,2 % Wachstumsfaktor b = 1,032 $f(t) = 124 \cdot 1{,}032^t$ (Mill. Einwohner) $f(27) \approx 290{,}251$, also wären <u>2020</u> bei unverändertem Wachstumsfaktor ca. 290 251 000 Einwohner in Pakistan zu erwarten.	Textverständnis; elementare Grundkenntnisse zu Exponentialfunktionen		

Skizzierung der Lösung	Anforderungsbeschreibung	TR	CAS
Teil c):			
Seuchen, Katastrophen, politische Maßnahmen zur Geburtenkontrolle, evtl. Kriege beeinträchtigen die Bevölkerungsentwicklung. Daher ist die Annahme eines konstanten Wachstumsfaktors für lange Zeiträume unrealistisch.	Vergleich des mathematischen Modells mit der Realität		
Teil d):			
$f(t) = 2 \cdot f(0) \Leftrightarrow 1{,}032^{t} = 2 \;\Leftrightarrow\; t \approx 22{,}01$ (Jahre) oder mittels im Unterricht behandelter Formel: $t_V = \frac{\ln 2}{\ln k}$ mit Wachstumskonstante $k = \ln 1{,}032$.	Berechnung der Verdoppelungszeit	Ermittlung der Verdoppelungszeit	exakte algebraische Ermittlung der Verdoppelungszeit mit CAS
Teil e):			
1993: 124 Mio.; 2004: 159,195 Mio. Z.B. liefert der Ansatz $159{,}195 = 124 \cdot b^{11}$ $\Leftrightarrow b = \left(\frac{159{,}195}{124}\right)^{\frac{1}{11}} \approx 1{,}023$ Die durchschnittliche jährliche Wachstumsrate in diesen 11 Jahren beträgt ca. 2,3 %. Der angegebene Wert 1,98 % für 2004 gibt die aktuelle jährliche Wachstumsrate von 2003 auf 2004 an. Dieser niedrigere Wert lässt eine deutliche Verlangsamung der Bevölkerungsentwicklung (in den letzten Jahren) erkennen.	Lösen einer Potenzgleichung; Vergleich des mathematischen Modells mit der Realität	exakte algebraische Lösung der Potenzgleichung	exakte algebraische Lösung der Potenzgleichung mit CAS