Digitaler Adventskalender 2005

www.mathekalender.de

Aufgaben

DFG-Forschungszentrum MATHEON
Mathematik für Schlüsseltechnologien

Inhaltsverzeichnis

Das DFG-Forschungszentrum Matheon veranstaltete in Dezember 2005 den Jugendwettbewerb: „Digitaler Adventskalender 2005“. Insgesamt knobelten zirka 9400 Teilnehmer an den täglich neu erscheinenden Aufgaben. Das vorliegende Heft beinhaltet nur die Aufgaben dieses Adventskalenders.

Das DFG-Forschungszentrum Matheon möchte die angewandete Mathematik Schülern in verschiedenartigen Aktionen näher bringen. Informationen dazu findet man unter

`http://www.matheducates.de`
`http://www.matheon.de`

Viel Spaß beim Nachrechnen der Aufgaben wünscht das Mathekalender-Team.

Berlin, Januar 2006

1 Launische Elfen

Autorin: Heike Siebert
Projekt: A8

1.1 Aufgabe

Es ist allseits bekannt, dass der Weihnachtsmann seine Arbeit nicht allein schafft und ihm fleißige und freundliche Geschöpfe, nämlich die Elfen, zur Seite stehen. Beschäftigt man sich allerdings etwas näher mit den Elfen, so stellt man fest, dass ihr Image nur auf eine sehr gute PR-Kampagne zurückgehen kann, da sie alles andere als freundliche, fröhliche Gesellen sind. Sie sind sogar außerordentlich launisch und starken Stimmungsschwankungen unterworfen. Die Schwierigkeit für den Weihnachtsmann liegt nun darin, dass Elfen nur dann arbeiten, wenn sie gut gelaunt sind.

In diesem Jahr stehen dem Weihnachtsmann die drei Elfen Egbert, Egfried und Egmont zur Seite. Die drei kennen sich schon sehr lange und ob sich die Laune eines von ihnen in naher Zukunft ändert, hängt, wenn keine besonderen Ereignisse eintreten, nur davon ab, wer welche Gemütslage zum augenblicklichen Zeitpunkt hat. Im Einzelnen sieht das so aus:

- Egmont mag Egfried nicht besonders. Er bekommt gute Laune, wenn Egfried schlecht gelaunt ist, und schlechte Laune, wenn Egfried gut gelaunt ist.
- Egbert ist der wohl Launischste von den dreien. Seine eigene gute Stimmung ist für ihn schon Anlass genug, schlechte Laune zu bekommen.
- Egberts Laune überträgt sich auf Egfried, falls Egmont gute Laune hat.
- Egmonts gute Laune färbt auf Egbert ab, aber nur, wenn dieser selbst gerade schlechte Laune hat.
- Hat Egmont schlechte Laune, so führt dies zu guter Stimmung bei Egfried.
- Ist Egmont schlecht gelaunt, so verdirbt es auch Egbert die Stimmung.

Was man über Elfen im Allgemeinen sagen kann, gilt natürlich auch für diese drei. Obwohl kurzzeitig mehr als ein Elf gute Laune haben kann, so haben doch dauerhaft nie zwei Elfen gleichzeitig eine positive Gemütslage. Des Weiteren ändern nie zwei Elfen gleichzeitig ihre Laune, auch wenn die Voraussetzungen für einen Stimmungsumschwung bei mehr als einem gegeben sind. Nur welcher Elf als Erster seine Laune ändert und damit eine neue Situation für alle drei Elfen und ihre Stimmungen schafft, wissen wir meist nicht und müssen dementsprechend verschiedene Möglichkeiten der Stimmungsentwicklung in Betracht ziehen. Tritt jedoch eine bestimmte Situation wiederholt auf, so verhalten sich die Elfen immer wie beim ersten Eintreten dieser Situation.

Da Elfen körperliche Arbeit verabscheuen, verursacht die Nachricht, dass sie dem Weihnachtsmann helfen sollen, bei allen dreien schlechte Laune. Die Frage ist jetzt, ob der Weihnachtsmann mit Hilfe rechnen kann. Wie wird die Mitarbeit der Elfen aussehen?

Antwortmöglichkeiten:

1. Es arbeitet Egbert mit vielen Pausen, während die Anderen gar nichts tun, oder es arbeitet Egfried mit gelegentlicher Unterstützung von Egbert.
2. Letztlich arbeitet nur Egfried, oder Egmont arbeitet und bekommt ab und zu Hilfe.
3. Alle drei arbeiten zusammen, keiner gönnt sich eine Pause. Der Weihnachtsmann kann sich freuen.
4. Egbert arbeitet allein, und in seinen Pausen arbeiten Egmont und Egfried zusammen.
5. Letztlich arbeitet nur Egfried, oder Egfried und Egmont arbeiten non-stop und bekommen immer mal wieder Hilfe von Egbert.
6. Letzlich arbeitet entweder nur Egfried oder nur Egmont, jeweils ganz allein ohne weitere Hilfe.
7. Überwiegend arbeiten Egfried und Egbert, Egmont schaut missmutig zu.
8. Egmont und Egbert hören immer gleichzeitig mit dem Arbeiten auf.
9. Der Weihnachtsmann erhält keine Hilfe.
10. Die drei Elfen arbeiten immer eine lange Zeit zusammen, in den Pausen spielen sie Skat.

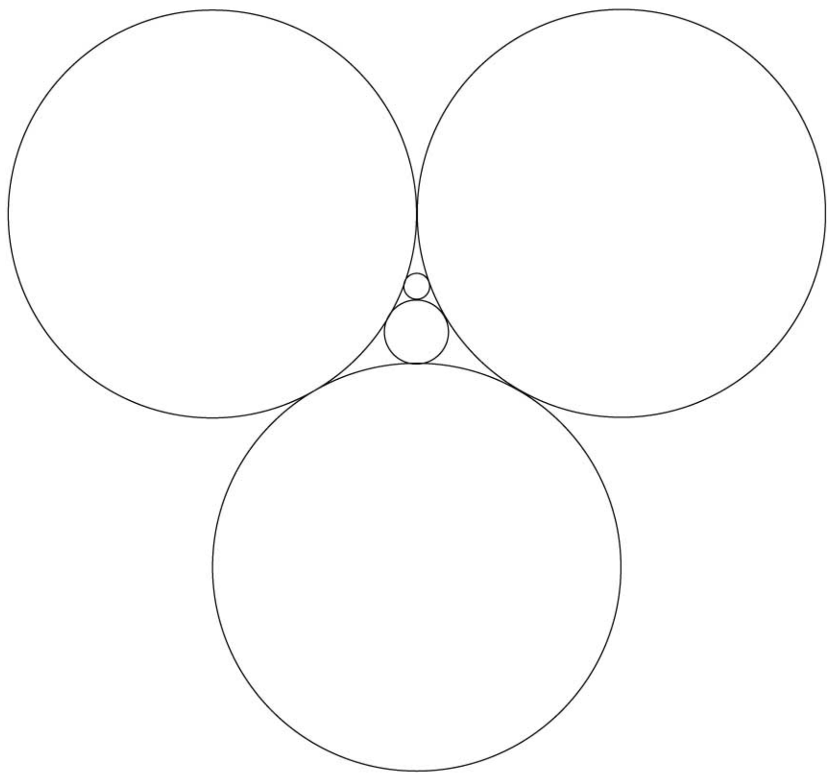
Es stellt sich hier die Aufgabe, die Entwicklung eines mit sprachlichen Mitteln beschriebenen Systems von Objekten (Elfen) und Interaktionen zwischen den Objekten zu untersuchen. Um keine in der Zukunft möglichen Zustände des Systems (Launenverteilung) zu übersehen oder Fehler aufgrund der Unübersichtlichkeit der Situation zu begehen, bietet es sich an, ein mathematisches Modell für das System zu entwickeln. In vielen Naturwissenschaften geschieht die Beschreibung eines Systems mittels Differentialgleichungen. Es gibt jedoch auch die Möglichkeit der logischen Beschreibung, die einfacher ist, aber ebenfalls eine Analyse der zu erwartenden Entwicklung des Systems in der Zukunft erlaubt. Die letztgenannte Methode wird am DFG-Forschungszentrum MATHEON in der Projektgruppe A8 im Hinblick auf die Beschreibung genregulatorischer Netzwerke, die angeben, in welcher Weise sich bestimmte Gene durch ihre Produkte gegenseitig beeinflussen, untersucht. Viele Fragen theoretischer und praktischer Natur sind auf diesem Gebiet noch offen, deren Klärung den Biologen und Medizinern in ihrer Forschungsarbeit weiterhelfen kann.

2 Berührende Kreise

Autoren: Ivan Izmestiev, Boris Springborn
Projekt: F1

2.1 Aufgabe

Wenn die drei großen Kreise im Bild unten den Radius 1 haben, welchen Radius hat dann der ganz kleine Kreis?



(Der exakte Radius ist gefragt.)

Antwortmöglichkeiten:

1. $-\frac{16}{11} + \frac{29}{33}\sqrt{3}$
2. $\frac{3}{11} - \frac{4}{33}\sqrt{3}$
3. 0.0628
4. 0.06225

5. $\frac{1}{16}$

6. $\frac{13}{207}$

7. $\frac{2}{3}\sqrt{3} - 1$

8. $\sqrt{\frac{16}{11} - \frac{4}{33}} + \sqrt{3}$

9. $\frac{7}{\sqrt{3}} - \frac{4}{33}$

10. 0.6278

3 Dominoschlangen

Autoren: Frank Lutz, Brigitte Lutz-Westphal
Projekt: G5*, G6

3.1 Aufgabe

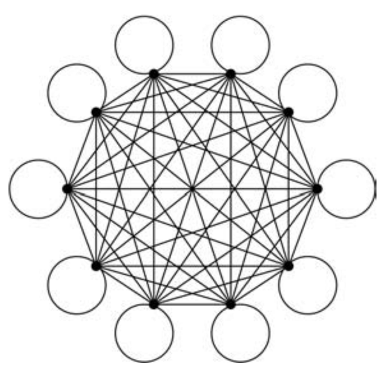
Immer noch so lange bis Weihnachten! Sebastian vertreibt sich die Zeit, indem er Dominoschlangen legt. Dabei werden die Dominosteine so hintereinander in eine Reihe gelegt, dass benachbarte Steine mit derselben Zahl aneinanderstoßen:

Beim ersten Versuch bleiben einige Steine übrig. Er fragt sich, ob man diese Steine nicht auch noch hätte anlegen können, wenn man geschickter angefangen hätte.

Er spielt mit einem 9er-Dominospiel, das für alle möglichen Paare der Zahlen 0 bis 9 genau einen Stein enthält.

Wie viele Steine bleiben beim Bau solch einer Dominoschlange mit 9er-Dominosteinen mindestens übrig?

Tipp: Am Fenster von Sebastians Zimmer hängt ein Weihnachtsstern. Er weist den Weg zur Lösung! Zwischen dem Stern und den Dominosteinen gibt es eine geheimnisvolle Beziehung. Außerdem hat Sebastian gerade ein „Haus vom Nikolaus“ gezeichnet.



Antwortmöglichkeiten:

1. Keiner, es können alle Steine in eine Schlange gelegt werden, wenn man es geschickt anstellt.
2. Es bleibt immer mindestens ein Stein übrig.
3. Es bleiben immer mindestens zwei Steine übrig.
4. Es bleiben immer mindestens drei Steine übrig.
5. Es bleiben immer mindestens vier Steine übrig.
6. Es bleiben immer mindestens fünf Steine übrig.
7. Es bleiben immer mindestens sechs Steine übrig.
8. Es bleiben immer mindestens sieben Steine übrig.
9. Es bleiben immer mindestens acht Steine übrig.
10. Es bleiben immer mindestens neun Steine übrig.

Diese Aufgabe stammt aus der diskreten Mathematik und hat mit der Planung von optimalen Wegen zu tun. Themen der diskreten Mathematik eignen sich sehr gut für den Mathematikunterricht. In zwei MATHEON-Projekten (Projekt G5*, http://www.math.tu-berlin.de/ westphal/projekt/ und Projekt G6, http://www.math.tu-berlin.de/didaktik/tiki-index.php?page=Matheon+G6) wird an Konzepten und Materialien für den Unterricht über kombinatorische Optimierung gearbeitet.

4 Die Geschenkefabrik

Autoren: Sören Bartels, Rüdiger Müller
Projekt: C16

4.1 Aufgabe

In der Geschenkefabrik des Weihnachtsmanns arbeiten 20 Elfen. Eine von ihnen verwechselt niemals die Wunschzettel. Von jeweils zwei Elfen vertauscht eine regelmäßig die Listen mit den Wünschen. Wie viele der Elfen arbeiten immer korrekt?

Antwortmöglichkeiten:

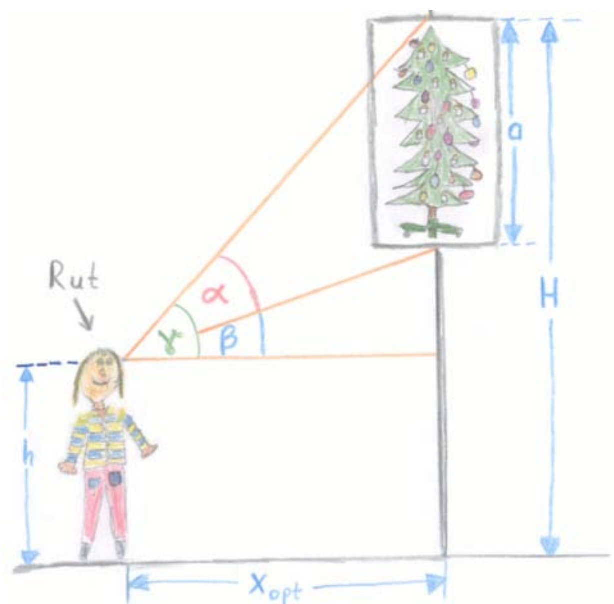
1. 1 Elf
2. 2 Elfen
3. 3 Elfen
4. 9 Elfen
5. 10 Elfen
6. 11 Elfen
7. 15 Elfen
8. 18 Elfen
9. 19 Elfen
10. 20 Elfen

5 Rut´s Weihnachtsbild

Autor: Dietmar Hömberg
Projekt: C11

5.1 Aufgabe

In Vorfreude auf Weihnachten hat Rut ein grośes Weihnachtsbaumbild gemalt, das ihr Vater sofort hoch an die Wand gehängt hat. Leider hat er es aber so hoch gehängt, dass sie es überhaupt nicht sehen kann, wenn sie direkt vor der Wand steht. Wenn sie an das andere Ende des grośen Zimmers geht, ist das Bild auch schon wieder ziemlich klein.Könnt ihr Rut helfen und sagen, in welchem Abstand x_{opt} sie sich von der Wand hinstellen soll, damit sie das Bild möglichst groś sieht, d.h. unter einem möglichst grośen Blickwinkel α? Die Oberkante des Bildes ist im Abstand $H = 2m$ vom Boden, Ruts Augenhöhe ist $h = 1m$, das Bild ist $a = 0.75m$ hoch, die Breite ist nicht wichtig. Die Skizze ist nicht perspektivisch, dafür enthält sie ein Selbstportrait von Rut und den von ihr gemalten Weihnachtsbaum.



Noch zwei Tipps: Statt den Abstand so zu berechnen, dass der Winkelα maximal wird, ist es vielleicht einfacher und genauso richtig, den Tangens von α zu maximieren. Außerdem kann die Anwendung des folgenden Additionstheorems die Rechnung erleichtern

$$\tan(\varphi_1 + \varphi_2) = \frac{\tan \varphi_1 + \tan \varphi_2}{1 - \tan \varphi_1 \tan \varphi_2} .$$

Der optimale Abstand für Rut ist:

1. $\frac{\pi}{2}\,m$
2. $1.77\,m$
3. $0.6\,m$
4. Am Ende des Zimmers
5. An der Teppichkante
6. $\frac{\pi}{2} + 0,4\,m$
7. Immer neben Mama
8. $0.5\,m$
9. $1.78\,m$
10. Unberechenbar

Bemerkung: Dieses Problem wurde bereits 1471 von dem deutschen Mathematiker Johann Müller (1436–76), besser bekannt als Regiomontanus, formuliert, allerdings in etwas anderer Form. Optimierungsprobleme sind allgegenwärtig in unserer Welt. Im DFG-Forschungszentrum beschäftigt sich z. B. das Projekt C11 damit, die Materialbearbeitung mit Laserlicht zu optimieren.

6 Das erste Weihnachts-Axiom

Autor: Thorsten Zander

6.1 Aufgabe

Der kleine Peter steht mit Onkel Kurt am 23. Dezember in der Küche. Durch die bevorstehenden Feiertage inspiriert, fragt Peter aufgeregt: „Onkel Kurt, Onkel Kurt, wie funktioniert eigentlich Weihnachten?“Onkel Kurt, der gerade die Nase rümpfend und anscheinend unbegründet besorgt dreinschauend eine Flasche Mineralwasser aus dem Kühlschrank nimmt, antwortet: „Mmmh, das gehen wir mal axiomatisch an. Ein Axiom ist übrigens eine Grundannahme, also etwas, was wir glauben, ohne es beweisen zu wollen oder zu können. Die Annahme der Wahrheit des Axioms beruht allein auf unserer Erfahrung, unserer Intuition oder dem Kontext unserer Fragestellung. Hat man die Axiome ausgewählt, so kann man, wenn man ein wenig darüber nachdenkt und sich an die Spielregeln des „logischen Denkens“hält, einiges über das System lernen, welches diese Axiome als Grundpfeiler hat. Hat man eine ungefähre Vorstellung von einem System, so kann man sich überlegen, welche grundlegenden Eigenschaften dieses System hat und somit, wenn man es gut gemacht hat, das System beschreiben. Jedoch ist es bei weitem nicht so, dass jede Wahl von Axiomen ein vernünftiges System beschreibt oder dass man jedes System auf diese Weise vollständig beschreiben kann. Vollständig... mmmmmmh.“Onkel Kurt nippt gedankenverloren an dem Glas, welches er während seiner unerwartet langen Rede über die Axiome mit dem Wasser aus dem Kühlschrank gefüllt hat. Peter fragt vorsichtig, einen weiteren Ausflug in die Welt der Axiome befürchtend: „Und ... was hat das mit Weihnachten zu tun?“
„Nun ja!“, erwidert Onkel Kurt: „Weihnachten kann man schon als so ein System auffassen, und wenn man die Spielregeln kennt, so weiß man, wie Weihnachten funktioniert. Eine Spielregel, also ein Axiom vom System Weihnachten, wie ihr es feiert, ist zum Beispiel Folgendes:

An jedem Heiligen Abend bekommt man Geschenke, wenn man im Jahr zuvor brav war.

Denk doch mal darüber nach, was du daraus schließen kannst und erzähl es mir. Ich bin sicher, dann können wir beide noch etwas über Weihnachten lernen.“Der kleine Peter schaut ein wenig skeptisch zu Onkel Kurt hinauf, beschließt jedoch, seinem Onkel zu glauben - geht in sein Zimmer, denkt nach und schreibt seine Schlussfolgerungen auf.

Am nächsten Morgen trifft er Onkel Kurt wieder in der Küche - diesmal einen Kaffee trinkend. Als er Peter bemerkt, wendet er seinen Blick vom Kühlschrank ab, den er bis dahin misstrauisch beäugte.

„Na Peter: “, sagt er, „was haben wir denn da?“

Hier sind nun die Ergebnisse von Peters Gedanken über das erste Weihnachts-Axiom aufgelistet. Hat er richtig geschlussfolgert?

Das erste Weihnachts-Axiom lautet:

(EWA) An jedem Heiligen Abend bekommt man Geschenke, wenn man im Jahr zuvor brav war.

Peters Schlussfolgerungen:

a) Wenn man brav war und an einem Abend Geschenke bekommt, so muss es der Heilige Abend sein.

b) Wenn man am Heiligen Abend keine Geschenke bekommt, so war man nicht brav.

c) War man brav und bekommt an einem Abend keine Geschenke, so kann es nicht der Heilige Abend sein.

d) Ist es der Heilige Abend, so kann man ausschließen, dass man brav war und trotzdem keine Geschenke bekommt.

e) An keinem Abend ist es möglich, dass es der Heilige Abend ist, man brav war und keine Geschenke bekommt.

f) Für jeden Abend gilt mindestens eine der Aussagen: Es ist nicht der Heilige Abend oder man war nicht brav oder man bekommt Geschenke.

g) An jedem Heiligen Abend, an dem man Geschenke bekommt, war man brav.

h) Falls an einem Abend die Erwartung, dass man Geschenke bekommt, weil man brav war, nicht erfüllt ist, so kann es nicht der Heilige Abend sein.

i) Für jeden Abend gilt mindestens eine der Aussagen: Es ist der Heilige Abend oder man war nicht brav oder man bekommt Geschenke.

j) Wenn ich brav bin und es ist der Heilige Abend, so bekomme ich Geschenke.

In jeder dieser Behauptungen versteht Peter unter der Aussage „brav war“, dass man vom letzten Weihnachtsabend bis zum derzeitigen Abend jederzeit brav war.Peters Aussagen werden von nun an abgekürzt durch den zugehörigen Buchstaben aus der obigen Aufzählung. Die Menge der Aussagen, die Peter oben getroffen hat, nennen wir P.
Also:

$$P = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$$

Ein Aussagentupel ist eine geordnete Menge von Aussagen. Ein Beispiel für ein Aussagentupel, welches zuerst die Aussage b und dann die Aussage a enthält, ist das 2-Tupel:

$$(b, a)$$

Wir definieren nun eine Funktion $O_{\mathrm{ewa}} : P \to \{0, 1\}$, die Orakelfunktion unter der Voraussetzung (EWA). Diese erkennt immer, ob eine Aussage von Peter, unter der Annahme, dass unser erstes Weihnachtsaxiom gilt, wahr ist. Sie ordnet der geprüften Aussage den Wert 1 zu, falls sie stimmt - im anderen Fall den Wert 0.Auf diese Weise kann jedem Aussagentupel ein Wahrheitstupel, also ein Tupel, dessen Einträge nur aus 0 und 1 sind, zugeordnet werden. Ein korrektes Wahrheitstupel ist ein Tupel, dessen Einträge immer 1 sind.
In der folgenden Liste gibt es genau ein korrektes Wahrheitstupel $(1, 1, 1, 1)$. Welches ist es?

1. (a, e, f, h)
2. (b, e, f, j)
3. (c, d, g, h)
4. (d, b, g, i)
5. (e, f, h, i)
6. (a, c, e, f)
7. (a, f, g, i)
8. (e, d, g, h)
9. (a, c, e, i)
10. (b, f, g, j)

Onkel Kurt ist eine Anspielung auf den genialen Mathematiker und Logiker Kurt Gödel (siehe http://de.wikipedia.org/wiki/Kurt_G%C3%B6del bzw. suche <google> define: Kurt Gödel). Das Verhältnis von Kurt Gödel zu seinem Kühlschrank ist belegt, jedoch an anderer Stelle nachzulesen.

7 Ein Kredit für Weihnachtsbaumkugeln

Autorin: Sina Tutsch
Projekt: E4

7.1 Aufgabe

Eine Mathematikerin aus dem DFG-Forschungszentrum Matheon arbeitet an Methoden zur dreidimensionalen Visualisierung. Sie hat die Geschäftsidee, Weihnachtsbaumkugeln mit bewegten Hologrammen herzustellen, die sich individuell gestalten lassen, und plant eine Existenzgründung. Aus einem öffentlichen Förderprogramm erhält sie ein günstiges Darlehen in Höhe von 50 000 Euro. Für die Startphase ihres Unternehmens benötigt sie jedoch den vierfachen Betrag.

Ihre Hausbank bietet ihr einen Kredit über 150 000 Euro mit einer Laufzeit von 5 Jahren zu den folgenden Konditionen an: Die Bank leiht der Mathematikerin die 150 000 Euro, und nach 5 Jahren zahlt diese den Betrag plus Zinsen zurück, also $150\,000 \cdot (1+r)^5$ Euro, wobei r den jährlichen Zinssatz bezeichnet. Hat sie mit den Hologramm-Weihnachtsbaumkugeln Erfolg, so kann sie nach 5 Jahren ihre Schulden tilgen, und die Bank würde durch die Zinsen einen Gewinn in Höhe von $150\,000 \cdot (1+r)^5 - 150\,000$ Euro machen. Die Bank zieht aber auch ein zweites Szenario in Betracht, nämlich den Ausfall der Schuldnerin, also das Scheitern des Projekts. In diesem Fall hätte die Bank einen Totalverlust von 150 000 Euro.

Anhand des vorliegenden Businessplans und ihrer Erfahrungen mit ähnlichen Existenzgründungen schätzt die Bank die Wahrscheinlichkeit p für einen Ausfall auf 28%. Sie wählt den Zinssatz r so, dass der erwartete Gewinn

$$150\,000 \cdot \big((1+r)^5 - 1\big) \cdot (1-p) - 150\,000 \cdot p$$

so hoch wie bei einer risikofreien Anlage der 150 000 Euro mit einem Zinssatz $r^\star$ von 2% ist. Nun muss die Mathematikerin entscheiden, ob sie den Kredit unter diesen Bedingungen aufnehmen möchte. Sie will den Vertrag nur unterschreiben, falls der Zinssatz r nicht höher als 10% ist.

Angenommen, es kommt tatsächlich zur Vergabe des Kredits. Dann bildet die Bank eine Rücklage für den Fall, dass die junge Unternehmerin mit ihrer Firma Bankrott geht und ihre Schulden nicht zurückzahlen kann. Das Geld wird risikofrei mit Zinssatz $r^\star$ angelegt. Welcher Betrag R ist als Rücklage ausreichend? Dazu beurteilt die Bank das Ausfallrisiko erneut, diesmal unter strengeren Kriterien im Sinne eines Stress-Tests. Sie setzt also eine höhere Ausfallwahrscheinlichkeit $\tilde{p}$ an. Mit dieser pessimistischen Schätzung sinkt natürlich auch der erwartete Gewinn. Das heißt, es steigt der erwartete Verlust, definiert als negativer erwarteter Gewinn. Die Bank wählt nun die Rücklage R so, dass sie in fünf Jahren diesen höheren erwarteten Verlust abdeckt. Das bedeutet, dass R die folgende Ungleichung erfüllt:

$$-150\,000 \cdot \big((1+r)^5 - 1\big) \cdot (1-\tilde{p}) + 150\,000 \cdot \tilde{p} \le R \cdot (1+r^\star)^5.$$

Frage: Akzeptiert die Mathematikerin die Konditionen des Kreditvertrags? Wenn ja, auf welcher pessimistischen Schätzung für die Ausfallwahrscheinlichkeit $\tilde{p}$ würde eine Rücklage in Höhe von mindestens 10 860 Euro beruhen?

1. Sie lehnt die Konditionen ab.
2. Sie akzeptiert, und $\tilde{p}$ wurde auf circa 31% angesetzt.
3. Sie akzeptiert, und $\tilde{p}$ wurde auf circa 35% angesetzt.
4. Sie akzeptiert, und $\tilde{p}$ wurde auf circa 40% angesetzt.
5. Sie akzeptiert, und $\tilde{p}$ wurde auf circa 43% angesetzt.
6. Sie akzeptiert, und $\tilde{p}$ wurde auf circa 45% angesetzt.
7. Sie akzeptiert, und $\tilde{p}$ wurde auf circa 49% angesetzt.
8. Sie akzeptiert, und $\tilde{p}$ wurde auf circa 53% angesetzt.
9. Sie akzeptiert, und $\tilde{p}$ wurde auf circa 58% angesetzt.
10. Sie akzeptiert, und $\tilde{p}$ wurde auf circa 59% angesetzt.

8 Wann geht der Laser an?

Autoren: Mark Lichtner, Lutz Recke
Projekt: D8

8.1 Aufgabe

Ein Laser ist eine Lichtquelle, bei der durch ständige Energiezufuhr Licht besonderer "Güte" oder "Reinheit" (einfarbig, kohärent, polarisiert, gro§e Intensitäten bzw. Amplituden) erzeugt werden kann. Das Verhalten hängt wesentlich von der Energiezufuhr ab, d.h. sie bestimmt, ob ein Laser dauerhaft Licht liefern kann. Mathematisch kann die Dynamik von vielen Lasern, ganz grob gesprochen, durch die Gleichung

$$x_{n+1} = \lambda x_n - x_n^3, \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{1}$$

beschrieben werden. Dabei ist $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Maß für die Energie, die in den Laser gepumpt wird, und $x_n \in \mathbb{R}$ beschreibt die Amplitude des Laserlichtes nach n Zeitschritten. Wenn λ und x_0 gegeben sind, so kann man x_n für $n = 1, 2, \dots$ mit Hilfe von (1) ausrechnen. Zum Beispiel gilt für beliebiges λ und für $x_0 = 0$, dass

$$x_1 = x_2 = \cdots = 0 \tag{2}$$

ist. Oder für beliebiges $\lambda \geq 1$ und $x_0 = \sqrt{\lambda - 1}$ gilt

$$x_1 = x_2 = \cdots = \sqrt{\lambda - 1}. \tag{3}$$

Die Lösungen (2) bzw. (3) beschreiben den ausgeschalteten bzw. den eingeschalteten stationären Laserzustand. Mit Hilfe von (1) möchte man das Verhalten des Lasers voraussagen. Zum Beispiel möchte man wissen,für welche Pumpraten λ (im Intervall $[0, 2]$ der technisch vernünftigen Werte) der Laser langfristig ausgeht, denn solche λ muss man vermeiden, falls der Laser in einem dauerhaft eingeschalteten Zustand (wie in einem DVD- oder CD-Player) betrieben werden soll. Dabei beschränkt man sich auf technisch vernünftige Werte der Pumprate λ und der Anfangsamplitude x_0, im Fall unserer Gleichung (1) sind das für λ das Intervall $[0, 2]$ und für x_0 das Intervall $[-1, 1]$.
Frage: Für welche $\lambda \in [0, 2]$ gilt die Eigenschaft

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \quad \text{für alle} \quad x_0 \in [-1, 1] \ ? \tag{4}$$

Die Schreibweise

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

bedeutet, dass der Betrag $|x_n|$ für große Indizes n beliebig klein wird. Eine präzise Definition lautet: Für jedes $\epsilon > 0$ gilt $|x_n| < \epsilon$ für alle bis auf endlich viele Indizes n.

Antwortmöglichkeiten:

1. Die Eigenschaft (4) gilt für alle $\lambda \in [0, 2]$.
2. Die Eigenschaft (4) gilt für kein $\lambda \in [0, 2]$.
3. Die Eigenschaft (4) gilt nur für $\lambda = 0$.
4. Die Eigenschaft (4) gilt für alle $\lambda \in [0, 1[$ und nur für diese λ.
5. Die Eigenschaft (4) gilt für alle $\lambda \in]0, 1]$ und nur für diese λ.
6. Die Eigenschaft (4) gilt nur für $\lambda = 1$.
7. Die Eigenschaft (4) gilt für alle $\lambda \in [1, 2]$ und nur für diese λ.
8. Die Eigenschaft (4) gilt für alle $\lambda \in]1, 2]$ und nur für diese λ.
9. Die Eigenschaft (4) gilt nur für $\lambda = 2$.
10. Die Eigenschaft (4) gilt für alle $\lambda \in [0.5, 1.5]$ und nur für diese λ.

Im Projekt D8 des DFG-Forschungszentrums Matheon wird das dynamische Verhalten von Halbleiterlasern in Abhängigkeit von verschiedenen Steuerparametern untersucht. Die dort verwendeten Gleichungen sind natürlich deutlich komplizierter und realistischer als die Gleichung (1). Detaillierte Informationen kann man unter http://www.wias-berlin.de/research-groups/laser/projects/FZ86_D8/index.html finden.

9 Buddy-Bär

Projekt: F5

9.1 Aufgabe

Am 11.06.2005 war es soweit - der erste wissenschaftliche Buddy-Bär wurde zur Eröffnung der „Langen Nacht der Wissenschaften'"enthüllt. Seitdem steht er vor dem Mathematikgebäude der Technischen Universität Berlin.

Abbildung 1: Der MATHEON Buddy-Bär

Die Gestaltung des Bären wurde von den Visualisierern des MATHEON übernommen. So hat das Projekt F5 neue mathematische Methoden eingesetzt, um ein Muster aus Kreisen und MATHEON-Logos so auf den Bären zu übertragen, dass das ursprünglich ebene Muster bei der Abbildung auf den gekrümmten Bären möglichst wenig (und auf kontrollierte Weise) verzerrt wird. Diese Methoden (sogenannte *diskrete konforme Abbildungen*) spielen sowohl in der reinen Mathematik als auch in der Computergraphik eine wichtige Rolle und wurden von Forschern an der TU und bei Caltech in Pasadena, Kalifornien, USA entwickelt.

Abbildung 2: Das MATHEON-Logo

Auf seiner rechten Tatze trägt der Bär das MATHEON-Logo (Abbildung 2), das aus drei kongruenten Rechtecken zusammengesetzt ist, die paarweise senkrecht zueinander stehen und einen gemeinsamen Mittelpunkt haben. Die Kantenlängen der Rechtecke stehen im Verhältnis 2 zu $1 + \sqrt{5}$;das Kantenverhältnis ist also der *goldene Schnitt.* Abbildung 3 zeigt die Einzelteile des Logos zum Ausdrucken und Nachbauen.
Da der Bär nun den ganzen Tag vor der Tür herumsteht und sonst nichts zu tun hat, vertreibt er sich die Zeit mit mathematischen Betrachtungen. Zum Beispiel fällt ihm auf, dass man ein interessantes geometrisches Objekt, ein *Polyeder*, erhält, wenn man die Ecken des MATHEON-Logos richtig verbindet.
Berechnen Sie den Flächeninhalt des Polyeders, das von den Ecken des Logos aufgespannt wird, unter der Voraussetzung, dass die Länge der kürzeren Seiten zwei ist.

Hilfestellung:

- Was für Polygone treten als Seiten des Polyeders auf? (Vorschlag: Logo nachbauen und auf der Tischplatte herumrollen.)
- Wie viele Seiten hat das Polyeder?
- Welche Kantenlängen treten auf?

Antwortmöglichkeiten:

1. 24π
2. $20\sqrt{3}$

3. $24\sqrt{5}$
4. 20π
5. $12\sqrt{5}$
6. $24\sqrt{3}$
7. 12π
8. $20\sqrt{5}$
9. $12\sqrt{3}$
10. $6\sqrt{3}$

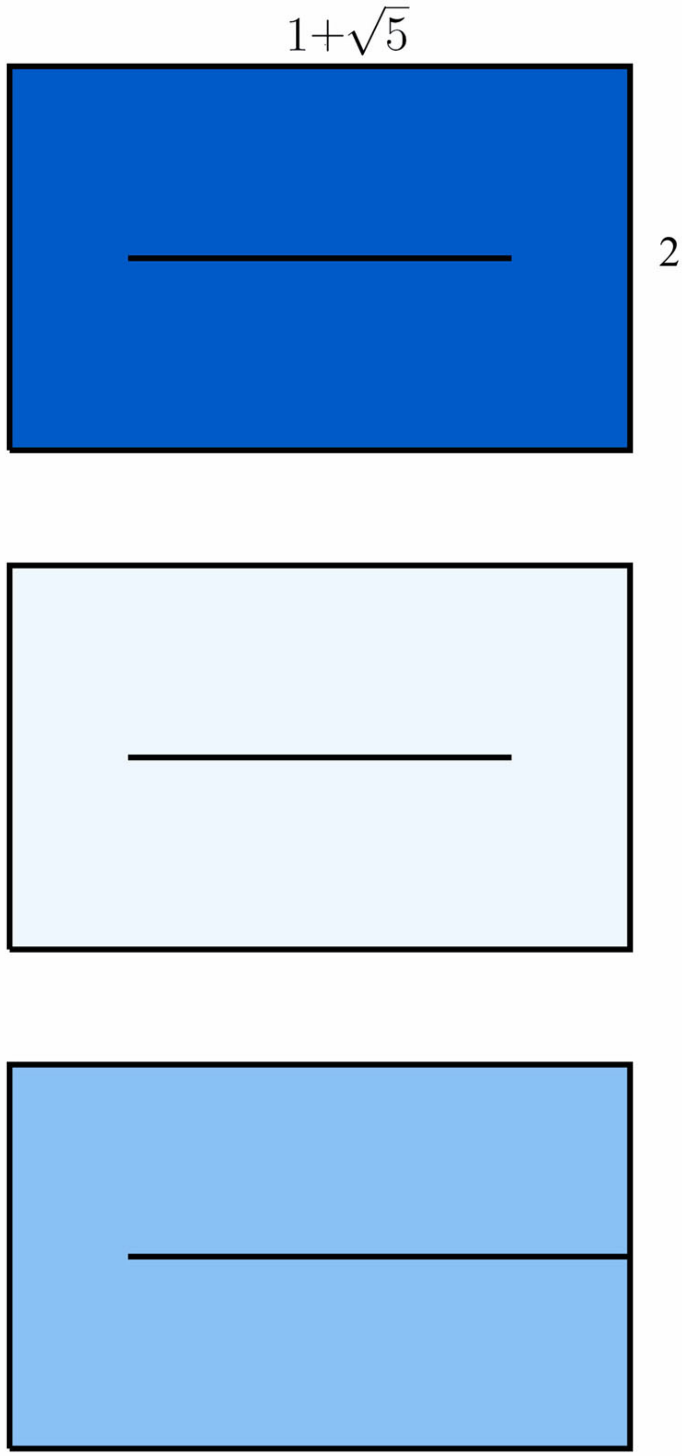


Abbildung 3: Logo zum Ausdrucken und Nachbauen

10 Gartenarbeit

Autor: Andreas Tuscherer
Projekt: C6

10.1 Aufgabe

Die drei Gärtner Nob, Hob und Bob stehen vor einer schwierigen Aufgabe. Sie sind unter anderem für die Bewässerung von mehreren Blumenbeeten in einer Berliner Gartenanlage verantwortlich. Aufgrund der Empfindlichkeit der Pflanzen dürfen diese nicht bei direkter Sonneneinstrahlung gegossen werden. Andererseits muss es zum Gießen aber noch hell genug sein, damit die Gärtner nicht eventuell stolpern und in eines der kostbaren Blumenbeete fallen. Daher eignen sich täglich nur 30 Minuten am Abend für den Gießvorgang.
Jeder der drei Blumengießer ist für die Bewässerung bestimmter Blumenbeete verantwortlich. Er gießt in einer festen Reihenfolge. Jedes Beet benötigt eine bestimmte Begießzeit, die der Gärtner genau einhalten muss. Die folgende Tabelle zeigt die Gießzeiten der einzelnen Beete in Minuten:

N_1	N_2	N_3	N_4	N_5	H_1	H_2	H_3	H_4	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
1.5	3	1.5	1	2	2	5	2	1.5	1	4	1	2	1

Nachdem ein Gärtner das Gießen eines Beetes beendet hat, läuft er gemäß der gegebenen Reihenfolge zu dem nächsten Blumenbeet. Für diesen Laufweg benötigt er eine bestimmte Zeit. Die nächste Abbildung zeigt die Aufteilung der Blumenbeete auf die drei Gärtner in der jeweils bearbeiteten Reihenfolge inklusive der Laufzeiten zwischen den einzelnen Beeten in Minuten:

$$\begin{aligned}
&\text{Nob:} \quad N_1 \xrightarrow{3} N_2 \xrightarrow{6} N_3 \xrightarrow{3} N_4 \xrightarrow{1.5} N_5 \\
&\text{Hob:} \quad H_1 \xrightarrow{1} H_2 \xrightarrow{5} H_3 \xrightarrow{3} H_4 \\
&\text{Bob:} \quad B_1 \xrightarrow{4} B_2 \xrightarrow{2} B_3 \xrightarrow{4} B_4 \xrightarrow{2} B_5
\end{aligned}$$

Ungünstigerweise sind in der Gartenanlage nur zwei verwendbare Wasserhähne vorhanden. Mit Hilfe einer speziellen Vorrichtung ist es allerdings möglich, mehrere Gartenschläuche an einen Wasserhahn anzuschließen. Jeder Gärtner muss sich also entscheiden, an welchen der beiden Wasserhähne er seinen Gartenschlauch anschließt. Für den gesamten Gießvorgang kann er dann nur über diesen Wasserhahn versorgt werden. Der Druck der Wasserquelle reicht aber zur Zeit nicht aus, um mehr als einen Schlauch gleichzeitig mit Wasser zu versorgen. Durch eine neuartige Technik lässt sich jedoch innerhalb von 10 Sekunden die Wasserversorgung von einem Schlauch zu einem anderen umschalten. Das Umschalten erfolgt immer dann, wenn ein Beet vollständig gegossen wurde.
Während ein Gärtner von einem Beet zum anderen läuft, benötigt er kein Wasser, da er ja gerade nicht gießt. Diese Zeit kann also problemlos dafür genutzt werden, einen anderen

Schlauch, der an demselben Wasserhahn befestigt ist, mit Wasser zu versorgen. Die Laufzeit von einem Beet kann auch für das Umschalten der Wasserversorgung genutzt werden. Außerdem kann ein Blumengießer natürlich auch am nächsten Beet warten, bis sein Wasserhahn wieder zur Verfügung steht. In diesem Fall ist die Umschaltzeit von 10 Sekunden aber zu berücksichtigen.
Die Aufgabe der Gärtner besteht darin, unter sich die Wasserversorgung mittels der zwei Wasserhähne zu klären und einen möglichen Gießplan zu finden. Außerdem würde der Verwalter der Gartenanlage aus ästhetischen Gründen gern einen der beiden Wasserhähne entfernen. Er möchte von den Gärtnern wissen, ob es auch unter diesen Bedingungen einen möglichen Gießplan gibt.

Von den folgenden Aussagen ist nur eine richtig. Welche ist es?

1. Sofern nur ein Wasserhahn verwendet wird, gibt es einen Gießplan, der nicht länger als 30 Minuten dauert.

2. Bob muss am meisten gießen.

3. Bei Verwendung von zwei Wasserhähnen gibt es einen Gießplan, so dass Hob seine Beete in 18 Minuten fertig gegossen hat.

4. Wenn ein dritter Wasserhahn vorhanden wäre, gäbe es einen Gießplan, der 21 Minuten und 30 Sekunden dauert.

5. Bei Verwendung von zwei Wasserhähnen existiert ein Gießplan, der 24 Minuten und 30 Sekunden dauert.

6. Wenn Hob und Bob alle ihre Beete tauschen, gibt es bei zwei Wasserhähnen einen besseren Gießplan.

7. Auch wenn das letzte von Bob zu gießende Beet B_5 in eine Schonung zur Aufzucht von Weihnachtsbäumen umgebaut würde (und nicht mehr gegossen werden müsste), gäbe es keinen Gießplan, der bei Verwendung von nur einem Wasserhahn höchstens 30 Minuten dauert.

8. Wenn man zwei Wasserhähne benutzt, beträgt die Dauer von jedem Gießplan mindestens 25 Minuten.

9. Wenn der Verwalter hilft und man zwei Wasserhähne zur Verfügung hat, kann man mit 13 Minuten und 30 Sekunden auskommen.

10. Wenn Nob und seine Beete einen Ruhetag haben, reichen bei zwei Wasserhähnen 20 Minuten zum Gießen aller Beete.

Problemhintergrund

Ähnliche Probleme wie in der obigen Aufgabe treten im modernen Karosseriebau auf. Die beschriebene Bestimmung eines Gießplans ist jedoch eine stark verfremdete Formulierung solcher Probleme. In der realen Anwendung besteht die Aufgabe darin, innerhalb einer bestimmten Taktzeit Schweißnähte an Karosserieteilen zu fertigen. Das Schweißen übernehmen Schweißroboter, die während des Schweißvorgangs von externen Laserquellen gespeist werden. Der Output einer Laserquelle kann im Bruchteil einer Sekunde von einem Roboter zu einem anderen umgeschaltet werden. Zum Gießproblem bestehen folgende Assoziationen:

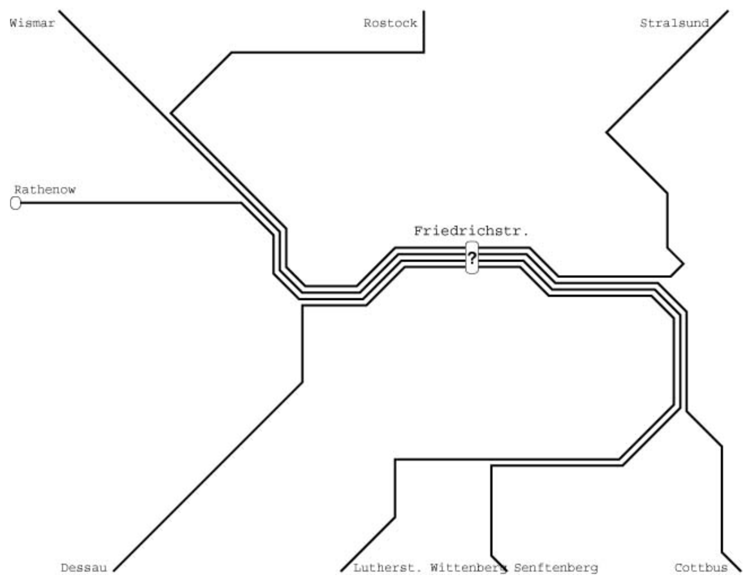
Gießproblem	Schweißproblem
Wasserhähne	Laserquellen
Gärtner	Schweißroboter
Beet	Schweißnaht
Gießzeit	Schweißzeit

11 Fahrplanentwurf

Autor: Christian Liebchen
Projekt: B5

11.1 Aufgabe

Alljährlich zum europaweiten Fahrplanwechsel Mitte Dezember stellt sich für Eisenbahnverkehrsunternehmen die Frage, ihr Liniennetz neu zu gestalten. In dieser Aufgabe betrachten wir diese Fragestellung aus der Sicht der Regionalleitung Nordost.



Betrachtet die (tagsüber) stündlich über die Berliner Stadtbahn verkehrenden RegionalExpress-Linien: RE2, RE3, RE4 und RE5. Diese besitzen jeweils einen westlichen und einen östlichen Linienabschnitt. Vom Referenzbahnhof Berlin-Friedrichstraße bestehen die folgenden Fahrzeiten in Minuten zu ihren jeweiligen Endpunkten (Auswahl):

	Westabschnitte		Ostabschnitte	
RE2	Wismar	195'	Cottbus	95'
RE3	Dessau	120'	Stralsund	200'
RE4	Rathenow	60'	Lutherstadt Wittenberg	100'
RE5	Rostock	185'	Senftenberg	135'

Für den mit Abstand größten Teil der Reisenden, die in Berlin einen RegionalExpress nutzen, liegen Abfahrts- oder Ankunftsbahnhof auf dem Abschnitt zwischen Berlin Zoologischer Garten und Berlin Ostbahnhof. Daher sind bei der Zuordnung zwischen westlichen und östlichen Linienabschnitten eher betriebsinterne Überlegungen ausschlaggebend. Dabei nimmt der Fahrzeugbedarf eine entscheidende Rolle ein.

Teilaufgaben:

a) Wie viele Züge werden zum Betrieb der bestehenden RegionalExpress-Linien RE2, RE3, RE4 und RE5 insgesamt benötigt (gemäß den obigen Daten und einer Mindestkehrzeit von einheitlich 20 Minuten in allen Endbahnhöfen)?

b) Ihr habt nun die Freiheit, eine neue Zuordnung zwischen westlichen und östlichen Linienabschnitten vorzunehmen. Welches ist die kleinste Zahl an Zügen, die ihr zum Betrieb *eurer* vier Linien erreicht?

c) Geht noch einmal wie in Teilaufgabe b) vor. Jedoch dürft ihr diesmal keine Linie von der Ostsee wieder zurück zur Ostsee durchbinden: Wismar-Berlin-Stralsund und Rostock-Berlin-Stralsund sind also verboten. Ebenso wenig darf Dessau direkt mit Lutherstadt Wittenberg verknüpft werden. Wie viele Züge erfordern eure modifizierten Linien dann?

Hinweis:
Der Fahrzeugbedarf einer Linie berechnet sich folgendermaßen:

$$\text{Zugzahl} \quad = \quad \frac{\text{Umlaufzeit}}{\text{Taktzeit}}.$$

Die Umlaufzeit errechnet sich wiederum als

$$\text{Umlaufzeit} \quad = \quad \left\lceil \frac{\text{Fahrzeiten+Mindestkehrzeiten}}{\text{Taktzeit}} \right\rceil \cdot \text{Taktzeit},$$

wobei $\lceil x \rceil := \min\{z \in \mathbf{Z} \mid z \geq x\}$ die Funktion „Aufrunden“codiert, also beispielsweise $\lceil 3.14 \rceil = 4$, aber auch $\lceil 4 \rceil = 4$.
Betrachtet beispielhaft die *halbstündlich* verkehrende RegionalExpress-Linie RE1. Die Fahrzeit Magdeburg - Friedrichstraße beträgt 105 Minuten, die Fahrzeit Friedrichstraße - Eisenhüttenstadt beträgt 90 Minuten. Damit ergibt sich für sie exemplarisch:

$$\text{Umlaufzeit} = \left\lceil \frac{105+90+20+90+105+20}{30} \right\rceil \cdot 30 = 450,$$

bzw. eine Zugzahl von 15 Zügen.

Anmerkungen:
Selbstverständlich gibt es bei der Definition der RegionalExpress-Linien weitere vielschichtige Anforderungen zu berücksichtigen. Viele davon ergeben sich im Rahmen der Fahrplankonstruktion. So kann das Erreichen der von euch berechneten Zugzahlen unter Umständen nicht möglich sein, wenn ihr die bestehenden eingleisigen Strecken berücksichtigen oder aber einen Halbstundentakt zwischen Berlin und dem Flughafen Berlin-Schönefeld (Linienabschnitte in Richtung Lutherstadt Wittenberg und Senftenberg) herstellen müsstet.
Schließlich haben wir der Einfachheit halber auch noch alternative Linienendpunkte vernachlässigt. So verkehrt beispielsweise nur alle zwei Stunden ein RegionalExpress der Linie RE3 (im Wechsel mit InterCity-Zügen) nach Stralsund. Jeder zweite RE3 findet hingegen seinen Endpunkt in Schwedt.

Im DFG-Forschungszentrum Matheon wurden mathematische Modelle entwickelt, mit denen diese Art von Fragestellungen umfassend beantwortet werden können.

Antwortmöglichkeiten:

1. a) 40 b) 39 c) 40
2. a) 41 b) 39 c) 39
3. a) 41 b) 39 c) 40
4. a) 41 b) 39 c) 41
5. a) 41 b) 40 c) 40
6. a) 41 b) 40 c) 41
7. a) 41 b) 41 c) 41
8. a) 41 b) 40 c) 41
9. a) 42 b) 40 c) 42
10. Andere

12 Postwichtel

Autor: Falk Ebert
Projekt: D13

12.1 Aufgabe

Bekanntlich bekommt man ja zu Weihnachten selten das, was man sich wirklich wünscht. Schuld daran ist der Postwichtel, der grundsätzlich immer die Wunschzettel der Kinder durcheinander bringt. Auch in diesem Jahr wurden alle Wunschzettelbriefe geöffnet, vom kalten Polarwind durcheinander gewirbelt und dann wahllos den Adressen zugeordnet. Wie wahrscheinlich ist es, dass nach diesem Durcheinander überhaupt niemand seine eigenen Geschenkwünsche erfüllt bekommt?

Antwortmöglichkeiten:

1. 0% - Irgendjemand bekommt sicher sein richtiges Geschenk.
2. $\approx$ 10%
3. $\approx$ 20%
4. $\approx$ 30%
5. $\approx$ 40%
6. $\approx$ 50%
7. $\approx$ 60%
8. $\approx$ 70%
9. $\approx$ 80%
10. $\approx$ 100% - In dem Durcheinander kann niemand sein richtiges Geschenk erhalten.

13 Mit dem Schlitten im Labyrinth

Autor: Thomas Richter
Projekt: G4

13.1 Aufgabe

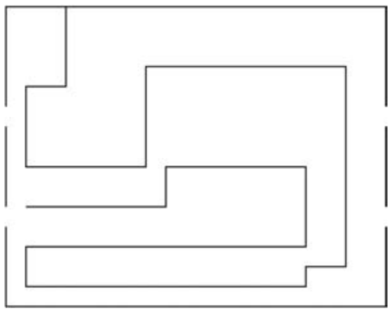
Auf Karopapier lassen sich ganz wunderbar Labyrinthe zeichnen und entwickeln. Wände werden hierzu entlang der Kästchenkanten mit einem Bleistift gezogen, Freiräume dazwischen sind die Gänge durch ein verschlungenes Labyrinth.

Die heutige Aufgabe beschäftigt sich mit genau dieser Art von Labyrinthen, also Karopapier, Bleistift und Radiergummi bereithalten. Wir beginnen damit, auf ein solches Blatt Karopapier ein Rechteck zu zeichnen, welches den äußeren Rand des Labyrinths darstellt. Auf der linken Seite des Rechtecks bitte zweimal ein Kästchen Platz lassen, diese werden die Eingänge des Labyrinths. Auf der rechten Seite bitte ebenso Platz für zwei Ausgänge lassen.

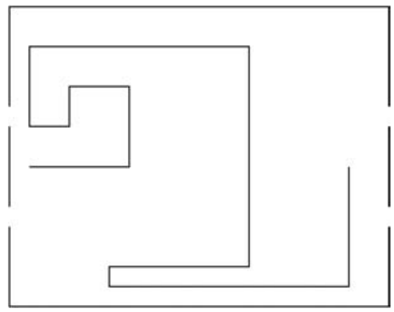

Die Ausgangssituation

Wir können nun entlang der Kanten des Karopapiers Wände ziehen; eine wichtige Spielregel ist hierbei, dass eine Wand außer an ihrem Anfangspunkt nirgendwo sonst sich selbst oder eine andere Wand berühren darf.
Beginnt die Wand in der Mitte eines freien Raumes, so nennen wir diese eine *freistehende Wand*.
Entsteht sie als Abzweig von einer bereits bestehenden Wand oder auch an der Außenmauer, so nennen wir sie eine *abzweigende Wand*.
Damit die Aufgabe nicht zu schwierig wird, erlauben wir nur eine einzige freistehende Wand, die Anzahl der abzweigenden Wände ist aber beliebig - wir wollen sie N nennen.
Auf diese Weise wird das Labyrinth Wand für Wand aufgebaut, bis sich mit den oben formulierten Regeln keine weiteren Wände mehr ziehen lassen.
Das Labyrinth ist dann fertig.

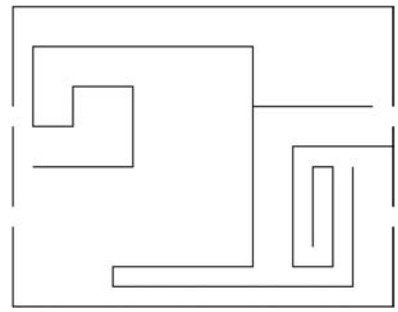
In den Abbildungen sind Beispiele für Labyrinthe dargestellt, die jedoch noch nicht fertig sind.



Eine abzweigende Wand



Eine freistehende Wand



Fortgeschrittenes Stadium: Eine freistehende und zwei abzweigende Wände

Der Weihnachtsmann will jetzt mit seinem Schlitten durch dieses Labyrinth fahren und zwar so, dass er niemals seine eigene Spur im Schnee überkreuzen muss. Zur Vereinfachung wollen wir annehmen, dass diese Spur sehr dünn ist.
Ferner kann der Weihnachtsmann im Labyrinth nicht wenden, dazu ist der Schlitten zu groß, und der Platz reicht nicht.
Die heutige Frage lautet nun: Wie viele verschiedene Wege gibt es durch dieses Labyrinth, d.h. von einem der beiden (linken) Eingänge bis zu einem der beiden (rechten) Ausgänge?

Anwortmöglichkeiten:

1. Es gibt vier Wege.
2. Es gibt acht Wege.
3. Die Anzahl der Wege hängt von der Anzahl N der Wände ab und ist $4N$.
4. Die Anzahl der Wege hängt von der Anzahl N der Wände ab und ist 2^N.
5. Die Anzahl der Wege hängt von der Anzahl N der Wände ab und ist $4 * 2^N$.
6. Die Anzahl der Wege hängt von der Anzahl N der Wände ab und ist $2 * 4^N$.
7. Die Anzahl der Wege hängt von der Anzahl N der Wände ab und ist 4^N.
8. Die Anzahl der Wege hängt von der Anzahl N der Wände ab und ist N^2.
9. Die Anzahl der Wege hängt vom Aufbau des Labyrinths ab und lässt sich nicht allgemein angeben.
10. Es gibt unendlich viele Wege.

14 Regen

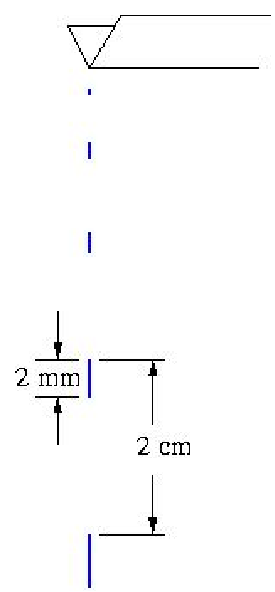
Autoren: René Lamour, Caren Tischendorf
Projekt: D5

14.1 Aufgabe

Schon fürchtete der Weihnachtsmann, in diesem Jahr seine Geschenke nicht pünktlich austeilen zu können - es hatte so stark geschneit, dass er in seiner Alpenhütte eingeschneit war. Zum Glück fing es aber an zu tauen, und die Tropfen des schmelzenden Schnees fielen vom Dach der Alpenhütte. Jede Sekunde fielen zehn Tropfen von der Kante nach unten. Dieses erfreuliche Ereignis musste im Foto festgehalten werden.

Aber auf dem Foto waren nicht die Tropfen, sondern Striche zu sehen. Kann man daraus die Belichtungszeit berechnen, mit der der Weihnachtsmann das Foto aufgenommen hat?

Auf dem Foto hatten zwei Tropfen einen Abstand von 2 cm, und der obere der beiden war als 2 mm langer Strich zu sehen. Ein Vergleich mit der Hüttenhöhe zeigte einen Verkleinerungsmaßstab von 1 : 25.
Wir nehmen an, dass die Tropfen ohne Reibung und nur unter dem Einfluss der Erdanziehung ($g = 9.81\frac{m}{s^2}$) nach unten fallen.



Welche Belichtungszeit wurde von der Kamera automatisch gewählt?

1. Etwa 5 s

2. Etwa 1 s

3. Etwa 1/10 s
4. Etwa 1/25 s
5. Etwa 1/60 s
6. Etwa 1/100 s
7. Etwa 1/250 s
8. Etwa 1/500 s
9. Etwa 1/1000 s
10. Die Berechnung der Belichtungszeit ist nicht möglich.

15 Rohrsystem

Autor: Volker Kaibel
Projekt: B11

15.1 Aufgabe

Das folgende Bild skizziert ein Rohrsystem mit unterschiedlich dicken Rohren, deren Durchmesser über ihre Farbe angezeigt wird (siehe Legende):

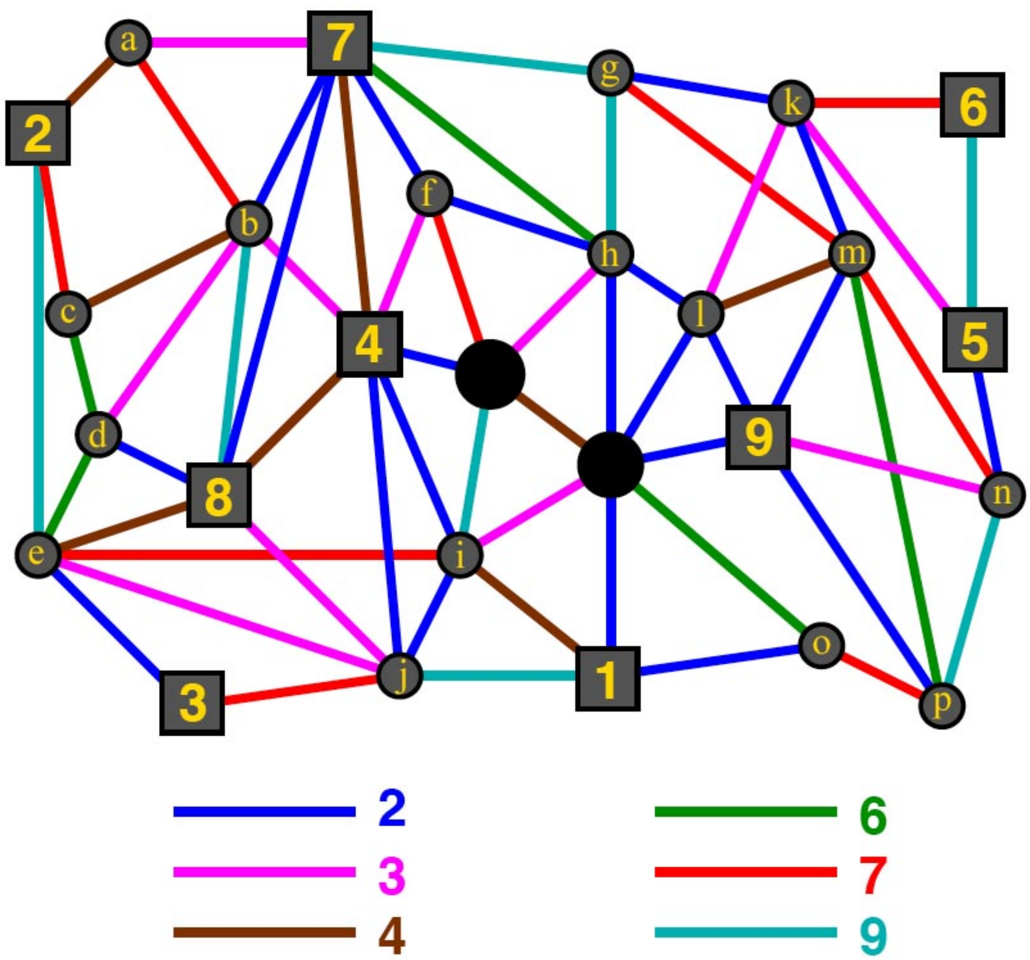


Abbildung 1: Das Rohrsystem

Ein Knoten in unserem Netz wird durch ein rundes oder eckiges, graues bzw. schwarzes Feld markiert. Eine Kante sei eine Verbindung zwischen zwei benachbarten Knoten.
Ein Weg in unserem Netz sei eine Verbindung von einem Knoten A zu einem Knoten B über verschiedene Kanten. So können wir von Knoten 7 zu Knoten 8 z.B. über folgenden

Weg fahren: Erst über die Kante von Knoten 7 zu Knoten b und dann von Knoten b zu Knoten 8.
Die Kapazität eines Weges in diesem Rohrsystem soll der Durchmesser des dünnsten Rohres auf dem Weg sein.
Ein Rohr vom Durchmesser 9 sei noch übrig. Es kann allerdings nur zwischen zweien der eckigen (mit Zahlen versehenen) Kreuzungspunkte (Knoten) verlegt werden.
Wo muss man dieses zusätzliche Rohr verlegen, damit die größtmögliche Kapazität eines Weges, der die beiden großen, runden, schwarzen Knoten verbindet, vergrößert wird?

Antwortmöglichkeiten:

1. Zwischen 4 und 9
2. Zwischen 3 und 4
3. Zwischen 1 und 9
4. Zwischen 1 und 5
5. Zwischen 2 und 7
6. Zwischen 6 und 9
7. Zwischen 2 und 9
8. Zwischen 4 und 1
9. Zwischen 8 und 3
10. Zwischen 1 und 8

Ähnliche Probleme treten als algorithmische Kernaufgaben im Bereich der Netzwerkplanung und -analyse auf. Das Rohrnetz entspricht dann z.B. einem Verkehrsnetz mit verschiedenen Kapazitäten auf Straßen oder Strecken (wie z.B. bei den Berliner Verkehrsbetrieben BVG) oder einem Telekommunikationsnetz, in dem die einzelnen Verbindungen zwischen Knotenpunkten unterschiedlich viele Daten pro Zeiteinheit transportieren können.

16 Aufzug

Autor: Stefan Körkel
Projekt: C12

16.1 Aufgabe

Wir sind in einem Hochhaus mit l Stockwerken und r Aufzügen Nr. 1 bis r.
Wir befinden uns am Eingang, d. h. im ersten Stock.
Wir können die Aufzüge folgendermaßen benutzen: Nach oben fahren und/oder in Aufzüge mit höherer Nummer umsteigen.
Wie müssen die Aufzüge halten, damit wir jeden Stock vom ersten Stock aus erreichen können, und zwar mit maximal c Mal Anhalten, jeweils mit oder ohne Umsteigen?
Wie groß darf l maximal sein, damit alle Stockwerke erreicht werden können?
Löse die Aufgabe für $r = 5$ und $c = 3$.

Antwortmöglichkeiten:

1. l darf maximal 8 betragen.
2. l darf maximal 15 betragen.
3. l darf maximal 20 betragen.
4. l darf maximal 56 betragen.
5. l darf maximal 64 betragen.
6. l darf maximal 69 betragen.
7. l darf maximal 101 betragen.
8. l darf maximal 102 betragen.
9. l darf maximal 125 betragen.
10. l darf maximal 243 betragen.

Bemerkung:

Im Projekt C12 entwickeln wir Algorithmen zur effizienten Lösung von nicht-linearen Optimierungsproblemen mit Hunderten bis Tausenden von Variablen und Nebenbedingungen. Wichtig ist dabei die effiziente Bereitstellung von Ableitungsvektoren und -matrizen. Das Aufzugproblem ist analog zu einer Fragestellung, wie man adjungierte Ableitungen (z. B. Gradienten der Zielfunktion) im sogenannten Rückwärtsmodus bei vorgegebenem Speicheraufwand möglichst schnell berechnen kann.

17 Geschenkverteilung

Autor: Matthias Peinhardt
Projekt: B11

17.1 Aufgabe

Der Weihnachtsmann hat wieder einmal ein Problem mit der Geschenkverteilung. Ein besonders schwieriger Fall sind diesmal die Familien Lindemann, Borel, Hilbert und Schlegel. Diese vier Familien bestehen alle aus zwei Eltern, einer Tochter und einem Sohn. Um nicht als einfallslos zu gelten, hat sich der Weihnachtsmann vorgenommen, dass in keiner Familie ein Geschenk doppelt vorkommen soll. Da die Familien Lindemann und Borel Hertha BSC-Fans sind und sich deswegen häufig sehen, sollen deren Eltern ebenfalls alle unterschiedliche Geschenke bekommen, genauso wie die vier Kinder dieser beiden Familien. Gleiches gilt jeweils für die Eltern und Kinder der Familien Hilbert und Schlegel, die Fans von Alba Berlin sind. Damit nicht genug: Die männlichen Mitglieder der Zehlendorfer Familien Lindemann und Schlegel sind im dortigen Männerchor und sollen auch nicht das Gleiche bekommen, während die Frauen dieser beiden Familien (Carmen Lindemann und Marita Schlegel) ebenfalls nicht gleich beschenkt werden sollen, da alle vier zusammen Schach spielen. Diese beiden Einschränkungen gelten auch für die Kreuzberger Familien Borel und Hilbert.
All dies wäre nicht so schlimm, wenn die Elfen für die vier Familien nicht jeweils genau vier Abakusse, Fußbälle, Liederbücher und Kuschelschweine hergestellt hätten. Außerdem haben einige der zu Beschenkenden echte Herzensw¨ünsche geäußert: So möchte der Vater der Familie Lindemann unbedingt ein Liederbuch, während seine Tochter ebenso wie der Sohn der anderen Zehlendorfer Familie gern Abakusse hätten. Der Vater der Familie Borel soll schließlich einen Fußball bekommen, die Tochter der anderen Kreuzberger Familie wünscht sich ein Kuschelschwein.
Kann der Weihnachtsmann all diese Wünsche berücksichtigen, und wenn ja, was bekommt dann Sophie Schlegel?

Antwortmöglichkeiten:

1. Kuschelschwein oder Fußball, das kann der Weihnachtsmann sich aussuchen.
2. Man kann nicht alle Wünsche gleichzeitig erfüllen.
3. Es ist das Liederbuch.
4. Nur der Fußball kommt in Frage.
5. Alle Geschenke wären möglich.

6. Natürlich bekommt sie den Abakus.
7. Es ist das Kuschelschwein.
8. Kuschelschwein oder Abakus sind möglich.
9. Abakus oder Liederbuch.
10. Bis auf den Fußball sind alle Geschenke möglich.

18 Katz und Maus

Autoren: Peter Deuflhard, Anton Schiela
Projekt: A1

18.1 Aufgabe

„Da bin ich ja gerade nochmal davongekommen!“Mathy die Maus saß in der Ecke des Mauseloches und erholte sich von ihrem Schreck.

„Was war denn los, Mathy?“

„Die Katze hätte mich fast erwischt. Um Haaresbreite bin ich noch entkommen.“

„Erzähl mal!“

„Ich saß da vorne an dem Stein, also ziemlich genau einen Meter vom Mauseloch entfernt, als ich sah, wie die Katze sich anschlich. Das Mauseloch war genau vor mir, die Katze genau links von mir. Wir sahen uns kurz an, dann liefen wir gleichzeitig los. Ich immer geradeaus zum Loch, die Katze immer genau auf mich zu.“

„Gut, dass du so nah am Loch warst, denn Katzen können doppelt so schnell laufen wie Mäuse.“

„Und gut, dass die Katze nicht näher dran war, als ich sie sah. Wäre sie auch nur ein bisschen näher gewesen,hätte sie mich gefangen. Hmm, wie weit wird sie am Anfang wohl entfernt gewesen sein?“

Wie weit war die Katze von Mathy entfernt, als Mathy sie sah?

1. 1,00 m
2. 1,10 m
3. 1,20 m
4. 1,30 m
5. 1,40 m
6. 1,50 m
7. 1,60 m
8. 1,70 m
9. 1,80 m
10. 1,90 m

Tipp: Spiele die Jagd auf Papier nach, indem du beide schrittweise hüpfen lässt. Die Katze darf dabei doppelt so weit hüpfen wie die Maus. Probiere verschiedene Hüpfweiten für die Maus aus. So kannst du den Abstand zwar nicht exakt, aber doch genau genug berechnen, um die richtige Antwort auszuwählen.

19 Fußball-Weltmeisterschaft 2006

Autoren: Tobias Jahnke, Wilhelm Huisinga
Projekt: A6

19.1 Aufgabe

An der Fußball-Weltmeisterschaft 2006 nehmen 32 Mannschaften teil, die in acht Gruppen von je vier Mannschaften aufgeteilt werden. In der Vorrunde spielt jede Mannschaft gegen jede andere Mannschaft, die zur gleichen Gruppe gehört. Nach der Gruppenphase erreichen jeweils die besten zwei Mannschaften einer Gruppe das Achtelfinale.

Bei der Auslosung der Gruppen geht man folgendermaßen vor: Der Gastgeber (Deutschland) spielt auf jeden Fall in Gruppe A. Von den übrigen 31 Mannschaften werden die sieben stärksten Mannschaften *gesetzt*: Die stärkste Mannschaft spielt in Gruppe B, die zweitstärkste in Gruppe C, die drittstärkste in Gruppe D usw. Die übrigen 24 Mannschaften werden jetzt durch Los auf die acht Gruppen verteilt, indem man Kugeln mit den Namen dieser 24 Mannschaften aus einer Urne zieht. Die ersten drei gezogenen Mannschaften spielen in Gruppe A, die nächsten drei gezogenen Mannschaften in Gruppe B usw.

Costa Rica und die Ukraine haben sich bereits für die WM 2006 qualifiziert, gehören aber nicht zu den gesetzten Mannschaften. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Deutschland in der Vorrunde sowohl gegen Costa Rica als auch gegen die Ukraine spielen muss?

Antwortmöglichkeiten:

1. $\frac{2}{3}$
2. $\frac{1}{8}$
3. $\frac{1}{12}$
4. $\frac{1}{24}$
5. $\frac{1}{32}$
6. $\frac{1}{48}$

7. $\frac{1}{92}$

8. $\frac{1}{184}$

9. $\frac{1}{276}$

10. $\frac{1}{552}$

P.S.: Fußballfreundinnen und -freunde wissen, dass wir für diese Aufgabe einige Vereinfachungen gemacht haben. In Wirklichkeit ist das Auslosungsverfahren noch viel komplizierter!

20 Vergesslicher Weihnachtsmann

Autoren: Matthias Ehrhardt, Andrea Zisowsky
Projekt: D11

20.1 Aufgabe

Die Heinzelmännchen wenden sich mit folgendem Problem an einen Mathematiker: Der Weihnachtsmann ist alt geworden, und jedes Jahr vergisst er einige Kinder. Damit diese nicht leer ausgehen, verteilen die Heinzelmännchen bei ihnen eigene Geschenke. Doch wie viele Geschenke müssen sie dieses Jahr bereit haben?

Weiter erzählen sie, dass der Weihnachtsmann immer in der Nacht zu Weihnachten die Namen und Adressen aller zu beschenkenden Kinder auswendig lernt. Nach durchwachter Nacht kennt er am Weihnachtsmorgen um 8:00 Uhr alle Kinder. Danach ist er sehr beschäftigt: Er belädt den Schlitten und spannt die Rentiere an. Abends um 18:00 Uhr braust er los und verteilt alle Geschenke gleichzeitig.

Der Mathematikererstellt folgendes Modell: Es gibt K zu beschenkende Kinder.$p(t)$ sei die Anzahl der Kinder, die der Weihnachtsmann zur Zeit t noch weiß; es ist also $p(0) = K$. Weiterhin nimmt der Mathematikeroptimistisch an, dass der Weihnachtsmann einen Prozentsatz b $(0 < b < 100)$ nie vergisst und dass zur Zeit t die Vergessensrate $p'(t)$ proportional zum noch zu vergessenden Wissen $p(t) - b$ ist. Die Heinzelmännchen können aus ihrer Erfahrung die Information beitragen, dass die Proportionalitätskonstante bei etwa $c = -0.23$ liegt und dass $K = 100$ ist. Der Prozentsatz, der nie vergessen wird, wird von den Heinzelmännchen mit $b = 20$ geschätzt.
Welche Gleichung für $p(t)$ verwendet der Mathematiker, und wie viele Geschenke brauchen die Heinzelmännchen nach seiner Rechnung (ohne Sicherheitszugaben, gerundet)?
Hinweis: Die Konstanten sind so angegeben, dass mit t einheitenlos in Stunden gerechnet werden kann.

1. $p(t) = \frac{K}{100}\left[(100-b)e^{ct} + b\right]$, 72 Geschenke
2. $p(t) = \frac{K}{100}\left[(100-b)e^{ct} + b\right]$, 76 Geschenke
3. $p(t) = \frac{K}{100}\left[(100-b)e^{ct} - b\right]$, 72 Geschenke
4. $p(t) = \frac{K}{100}\left[(100-b)e^{ct} - b\right]$, 76 Geschenke
5. $p(t) = \frac{K}{100}\left[(100-b)e^{-ct} + b\right]$, 72 Geschenke

6. $p(t) = \frac{K}{100}\left[(100-b)e^{-ct}+b\right]$, 76 Geschenke

7. $p(t) = \frac{K}{100}\left[(100-b)e^{-ct}-b\right]$, 72 Geschenke

8. $p(t) = \frac{K}{100}\left[(100-b)e^{-ct}-b\right]$, 76 Geschenke

9. Der Mathematiker kann mit diesem Modell eine Lösung bestimmen, sie ist aber nicht eindeutig.

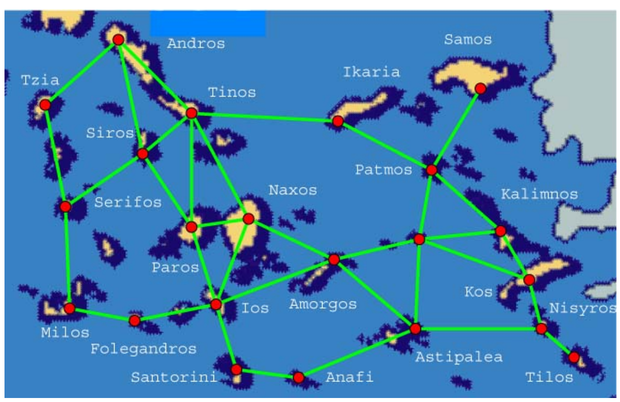
10. Der Mathematiker kann mit diesem Modell überhaupt keine Lösung bestimmen.

21 Telekommunikationsplanung in der Ägäis

Autor: Martin Oellrich
Institut für Mathematik, TU Berlin

21.1 Aufgabe

Auch auf den griechischen Inseln wollen die Menschen ihre Bankgeschäfte sicher erledigen. Zu diesem Zweck unterhält die Bank of Greece Filialen auf den Inseln Andros, Astipalea, Ios, Naxos, Patmosund Serifos. In jeder Filiale befindet sich ein Computer, der die komplette Verwaltung der Geschäftsvorgänge abwickelt. Damit einmöglicher technischer Defekt auf keinen Fall die Kunden schädigen kann, müssen alle sechs Computer ständig und zuverlässig diese Daten austauschen können. Dazu soll jeder der Rechner mit möglichst vielen der anderen verbunden (notfalls auch indirekt) werden, mindestens aber mit dreien. Die Verbindungsleitungen werden bei der Griechischen Telekom beauftragt. Diese unterhält ein Datennetz wie in der Skizze gezeigt. Die roten Punkte bedeuten Vermittlungsstellen, die grünen Kanten Kabelstrecken. Jede Verbindung wird darin geschaltet als eine Folge von Kanten, die einen Weg bilden. Da auch für diese Verbindungen zwischen den Computern größtmögliche Ausfallsicherheit herrschen muss, dürfen je zwei solcher Wege kein gemeinsames Stück teilen. Alle Wege müssen überschneidungsfrei durch das Netz geführt werden. (Der Mathematiker sagt: „kantendisjunkt“.) 1. Teil: Ihr steht nun im Dienste der



Griechischen Telekom und seid betraut mit dieser Aufgabe. Die Länge der Wege ist egal. Wie viele Verbindungen lassen sich maximal gleichzeitig legen, die den Auflagen der Bank of Greece genügen?
2. Teil: Als noch höhere Sicherheitsstufe wäre es denkbar, dass je zwei Verbindungen auch keine Vermittlungsstellen (außer ihren Endpunkten) teilen dürfen. (Der Mathematiker sagt: „knotendisjunkt“.) Wie viele Verbindungen sind unter diesen Umständen maximal noch planbar?

Antwortmöglichkeiten:

Nr.	1. Teil	2. Teil
1	8	11
2	9	7
3	10	8
4	11	nicht möglich
5	nicht möglich	nicht möglich
6	8	12
7	9	11
8	10	10
9	11	10
10	nicht möglich	5

22 Baumverkäufer

Autorin: Elena Virnik
Projekt: A9

22.1 Aufgabe

Zur Weihnachtsfeier kauft sich jede Familie einen Weihnachtsbaum. Manche kaufen sich eine Tanne, manche eine Fichte und manche eine Kiefer. Es ist bekannt, dass von allen Familien, die eine Tanne gekauft haben, im nächsten Jahr 10% eine Fichte und 10% eine Kiefer kaufen. Von den Fichtenkäufern steigen 20% auf Tannen und 20% auf Kiefern um. Von den Kiefernkäufern kaufen sich im nächsten Jahr 40% eine Tanne und 10% eine Fichte. Wie viel Prozent aller Familien müssen Tannenkäufer, wie viele Fichtenkäufer und wie viele Kiefernkäufer sein, damit sich die Käuferverteilung nicht ändert.

Antwortmöglichkeiten:

1. 70% Tannenkäufer, 10% Fichtenkäufer und 20% Kiefernkäufer
2. 30% Tannenkäufer, 20% Fichtenkäufer und 50% Kiefernkäufer
3. 45% Tannenkäufer, 15% Fichtenkäufer und 40% Kiefernkäufer
4. 20% Tannenkäufer, 20% Fichtenkäufer und 60% Kiefernkäufer
5. 50% Tannenkäufer, 15% Fichtenkäufer und 35% Kiefernkäufer
6. 20% Tannenkäufer, 40% Fichtenkäufer und 40% Kiefernkäufer
7. 60% Tannenkäufer, 20% Fichtenkäufer und 20% Kiefernkäufer
8. 40% Tannenkäufer, 25% Fichtenkäufer und 25% Kiefernkäufer
9. 20% Tannenkäufer, 30% Fichtenkäufer und 50% Kiefernkäufer
10. 20% Tannenkäufer, 60% Fichtenkäufer und 20% Kiefernkäufer

23 DNA

Autor: Stefan Kirchner
Projekt: A5

23.1 Aufgabe

Das Erbgut von Lebewesen ist auf der sogenannten DNA gespeichert. Eine DNA besteht grob gesagt aus einer langen Folge der vier Basen Adenin (A), Cytosin (C), Guanin (G) und Thymin (T). Seit einigen Jahren ist es möglich, die Folge der vier Basen zu einer gegebenen DNA zu bestimmen. Dieser Vorgang wird Sequenzierung genannt. Dabei tritt unter anderem das folgende Problem auf:

Für eine Menge von Wörtern soll ein kürzestes Wort gefunden werden, das jedes gegebene Wort als Teilwort enthält.

Betrachte dazu das folgende Beispiel, welches aus den vier Wörtern

(1)	TACAGC
(2)	CAGCG
(3)	CGTAC
(4)	ACGT

besteht. Ein kürzestes Wort, das jedes dieser vier Wörter als Teilwort enthält, ist `ACGTACAGCG`, wie hier zu sehen ist:

```
        ACGTACAGCG
(4)     ACGT
(3)      CGTAC
(1)        TACAGC
(2)          CAGCG
```

Nun zu der heutigen Rätselfrage! Aus wie vielen Buchstaben besteht ein kürzestes Wort, das die Wörter

GTGA CGAC GGTG TGAC GTGTG ACGG

enthält?

Antwortmöglichkeiten:

1. Das kürzeste Wort besteht aus 10 Buchstaben.
2. Das kürzeste Wort besteht aus 11 Buchstaben.
3. Das kürzeste Wort besteht aus 12 Buchstaben.
4. Das kürzeste Wort besteht aus 13 Buchstaben.

5. Das kürzeste Wort besteht aus 14 Buchstaben.
6. Das kürzeste Wort besteht aus 15 Buchstaben.
7. Das kürzeste Wort besteht aus 16 Buchstaben.
8. Das kürzeste Wort besteht aus 17 Buchstaben.
9. Das kürzeste Wort besteht aus 18 Buchstaben.
10. Das kürzeste Wort besteht aus 19 Buchstaben.

Die in der Praxis vorkommenden Fälle sind jedoch deutlich größer. Dort sind viele tausende Wörter gegeben, und jedes einzelne Wort ist erheblich länger als bei dieser Aufgabe. Wer weitere Aufgaben dieser Art lösen will, wird unter der URL `http://asz.informatik.hu-berlin.de/lndw/sssGui.html` fündig.

24 Zahlenrätsel

Autor: Günter M. Ziegler

24.1 Aufgabe

Was Zahlen so alles zählen können, sieht man an der folgenden Sammlung: Lauter Zitate aus bekannten und unbekannteren Büchern, Gedichten, Texten, Liedern:

Tunnel

Um den Berg herum schlängelten sich verschiedene Wege mit kleinen Brücken und Durchfahrten. Außerdem gab es auch noch ein kurvenreiches Eisenbahngleis. Es lief durch x_1 Tunnel, die kreuz und quer durch den Berg und seine beiden Gipfel fuhren.

Jahre

Am darauffolgenden Freitag ging er wieder zu den Barkassen. Und wie alle Freitage kehrte er ohne den erwarteten Brief nach Hause zurück. «Wir haben genug gewartet», sagte an jenem Abend seine Frau zu ihm. «Man muß deine Viechsgeduld haben, um x_2 Jahre lang auf einen Brief zu warten.»

Sinne

O du, Geliebte meiner x_3 Sinne, ich liebe dir! – Du deiner dich dir, ich dir, du mir. – Wir?
Das gehört [beiläufig] nicht hierher.
Wer bist Du, ungezähltes Frauenzimmer?

Saucen

Sie erklärte, dass sie x_4 verschiedene Fischsaucen zu bereiten verstehe, – sie habe den Mut, dafür einzustehen, obgleich ihr eigener Mann sie gewarnt habe, davon zu sprechen. «Sprich nicht davon!» habe er gesagt. «Niemand wird es dir glauben, und wenn man es glaubt, so wird man es lächerlich finden!» Und doch wolle sie es heute einmal sagen und offen bekennen, dass es x_4 Fischsaucen seien, die sie machen könne.

Männer

Ich hab schon x_5 Männer
Ins kühle Grab gebracht,
Erst hab ich mir mit Henna
Die Haare rot gemacht.
Dann wollt' ich auch mal blonde
Dann warn sie wieder grün;
Ich bin die hysterischste
Ziege von ganz Berlin.

Köpfe

Zu H*** K***, dem Denkenden, kam ein falscher Schüler und erzählte ihm: ≪In Amerika gibt es ein Kalb mit x_6 Köpfen. Was sagst Du darüber?≫ H*** K*** sagte: ≪Ich sage nichts.≫ Da freute sich der falsche Schüler und sagte: ≪Je weiser du wärest, desto mehr könntest du darüber sagen.≫
Der Dumme erwartet viel. Der Denkende sagt wenig.

Töchter

Es war einmal ein König, der hatte x_7 Töchter, eine immer schöner als die andere. Sie schliefen zusammen in einem Saal, wo ihre Betten nebeneinander standen, und abends, wenn sie darinlagen, schloss der König die Türe zu und verriegelte sie. Wenn er aber am Morgen die Türe aufschloss, so sah er, dass ihre Schuhe zertanzt waren, und niemand konnte herausbringen, wie das zugegangen war.

Jahre

Der König ist x_8 Jahre alt.
x_8 Jahre und schon der Staat.
Er schaut, wie aus einem Hinterhalt,
vorbei an den Greisen vom Rat

Meter

Ein Mathematiker hat behauptet,
dass es allmählich an der Zeit sei,
eine stabile Kiste zu bauen,
die x_9 Meter lang, hoch und breit sei.

Brote

Und J*** sprach zu ihnen: Wie viele Brote habt ihr? Sie antworteten: x_{10} und ein paar Fische.

Gefragt ist die Summe

$$\boldsymbol{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \cdots + x_{10}}$$

Antwortmöglichkeiten:

1. 42
2. 68
3. 792
4. 809

5. 1117
6. 1118
7. 1122
8. 1132
9. 1978
10. 2005

Günter M. Ziegler, 1963 in München geboren, ist Professor für Mathematik an der TU Berlin. Seine Arbeitsgruppe beschäftigt sich mit „Diskreter Geometrie“, besonders mit der Geometrie von Flächen, Kachelungen und Polyedern. Gemeinsam mit Martin Aigner von der FU Berlin hat er *Das BUCH der Beweise* geschrieben. Im MATHEON ist er für die Bereiche „Diskrete Mathematik und Optimierung“ und „Visualisierung“ mitverantwortlich.