Beispielklausur für zentrale Klausuren

Mathematik

Aufgabenstellung

Gegeben ist die Funktion *f* mit $f(x) = 0{,}5 \cdot x^3 - 4{,}5 \cdot x^2 + 12 \cdot x - 9$.

Die Abbildung 1 zeigt den zu *f* gehörigen Graphen.

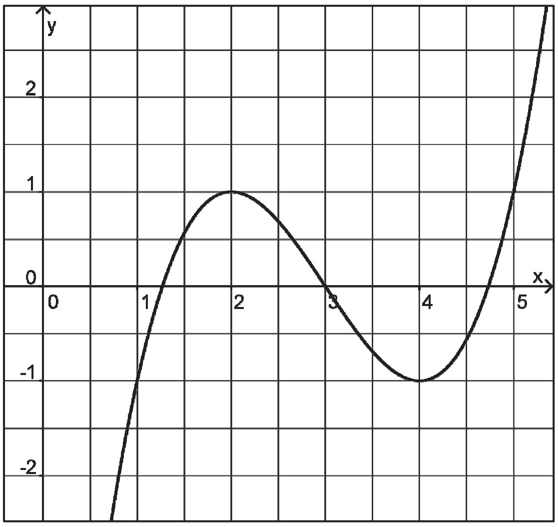

Abbildung 1

a) *Ermitteln Sie alle Nullstellen von f.*

Berechnen Sie die lokalen Extrempunkte des Graphen von f. **(8 Punkte)**

b) *Zeigen Sie, dass der Graph von f den Wendepunkt $W(3|0)$ besitzt.*

Bestimmen Sie eine Gleichung der Wendetangente an den Graphen von f. **(6 Punkte)**

c) *Zeichnen Sie in Abbildung 1 den Graphen der Ableitungsfunktion f' ein.*

An der Zeichnung kann man unterschiedliche Zusammenhänge zwischen den Graphen von *f* und f' erkennen.

Geben Sie zwei dieser Zusammenhänge an, die Sie selbst auswählen können. **(6 Punkte)**

d) *Entscheiden Sie, ob die Aussagen A und B jeweils wahr oder falsch sind, und begründen Sie Ihre Entscheidungen.*

A Die Steigung der Geraden durch die Punkte $A(4|-1)$ und $B(6|f(6))$ beträgt 5.

B Es gibt eine Tangente an den Graphen der Funktion *f*, die parallel zur Geraden *g* mit $g(x) = -2 \cdot x$ verläuft.

(5 Punkte)

e) Wenn man den Funktionsterm von *f* verändert, so hat dies Auswirkungen auf den Graphen der Funktion. Abbildung 2 zeigt z. B. den Graphen der Funktion h_1 mit der Funktionsgleichung $h_1(x) = f(x) + 1$.

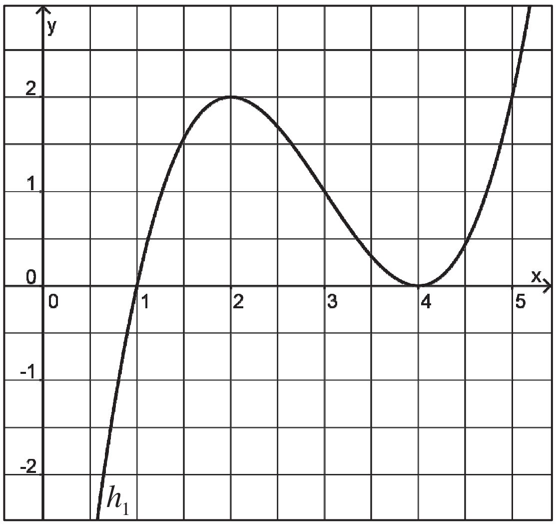

Abbildung 2

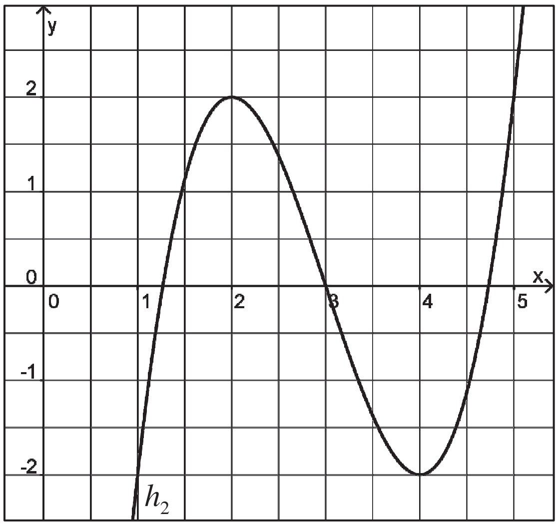

Abbildung 3

(1) Betrachten Sie nun die Abbildung 3. Die zugehörige Funktion bezeichnen wir mit h_2.

Beschreiben Sie mit Worten, wie der Graph von h_2 aus dem Graphen von f hervorgeht, und geben Sie die Funktionsgleichung von h_2 an.

(2) Betrachten Sie nun Funktionen h_3 mit $h_3(x) = a \cdot f(x) + b$. Es gibt Zahlen, die man für a und b einsetzen kann, so dass der Graph der zugehörigen Funktion den Tiefpunkt $T(2|-0,5)$ besitzt.

Begründen Sie geometrisch, dass für $a = -1$ und $b = 0,5$ der zugehörige Funktionsgraph diesen Tiefpunkt besitzt.

Ermitteln Sie neben $a = -1$ und $b = 0,5$ eine weitere konkrete Möglichkeit, so dass der Graph von h_3 den Tiefpunkt $T(2|-0,5)$ besitzt.

(7 Punkte)

Beispielklausur für zentrale Klausuren

Mathematik

Aufgabenstellung

Die Titanwurz ist die Pflanze, die die größte Blüte der Welt hervorbringt. Für ein Referat hat ein Schüler in einem deutschen Gewächshaus eine solche Pflanze täglich beobachtet und ihre Blütenhöhe notiert. Er hat berechnet, dass sich die Höhe der Blüte während seiner Beobachtung gut durch die Funktion h mit

$$h(t) = -0{,}015 \cdot t^3 + 0{,}45 \cdot t^2 + 2$$

beschreiben lässt.

Dabei bezeichnet t die Anzahl der Tage, die seit dem Beobachtungsbeginn vergangen sind und $h(t)$ die Höhe der Blüte in cm.

Der Graph von h ist in Abbildung 1 dargestellt.

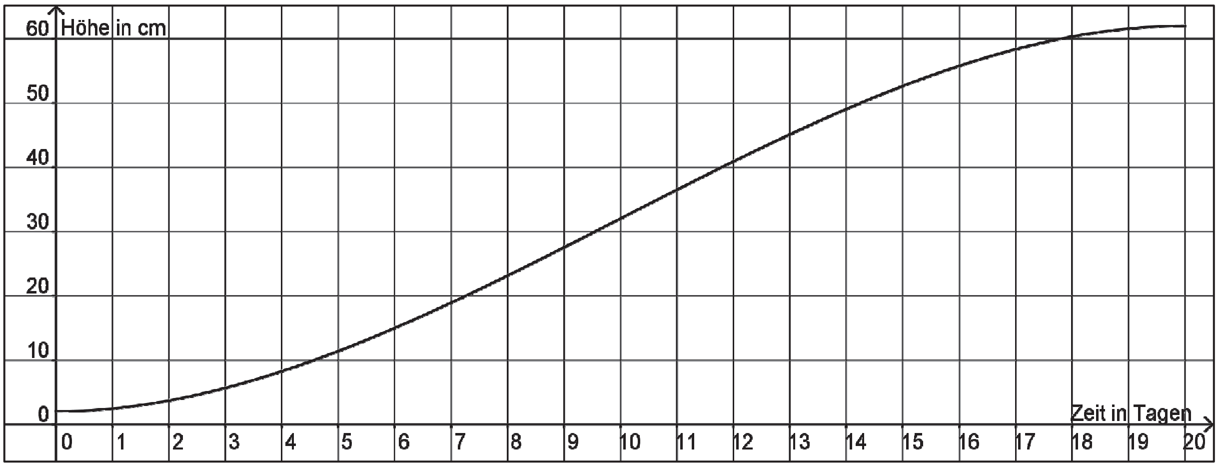

Abbildung 1

Mit dieser Funktion h ist es möglich, die folgenden Aufgaben a) bis d) zu bearbeiten.

a) *Berechnen Sie die Höhe der Blüte 3 Tage nach Beobachtungsbeginn.*

Berechnen Sie, nach wie vielen Tagen die Blüte eine Höhe von 20 cm erreicht (Das Ergebnis ist in Tagen und Stunden anzugeben). **(5 Punkte)**

b) *Berechnen Sie* $\dfrac{h(3)-h(0)}{3-0}$ *und berechnen Sie* $h'(3)$.

Geben Sie an, welche Bedeutung diese beiden von Ihnen berechneten Ergebnisse im gegebenen Sachzusammenhang haben. **(6 Punkte)**

c) *Ermitteln Sie rechnerisch, nach wie vielen Tagen ab Beobachtungsbeginn die Blüte der Pflanze ihre maximale Höhe erreicht.*

Berechnen Sie die maximale Höhe der Blüte. **(8 Punkte)**

d) Manche Botanische Gärten geben zwei Tage vor dem Zeitpunkt, an dem die Blüte der Pflanze am schnellsten wächst, ein besonderes Düngemittel.

Ermitteln Sie rechnerisch den Zeitpunkt, zu dem die Pflanze hier gedüngt werden müsste.

(5 Punkte)

e) In einem anderen Botanischen Garten, in Italien, wurde die Blüte der Titanwurz mehr als 4-mal so hoch wie die Blüte, die der Schüler in Deutschland beobachtet hat. In Abbildung 2 sind die Messungen für die italienische Blüte dargestellt.

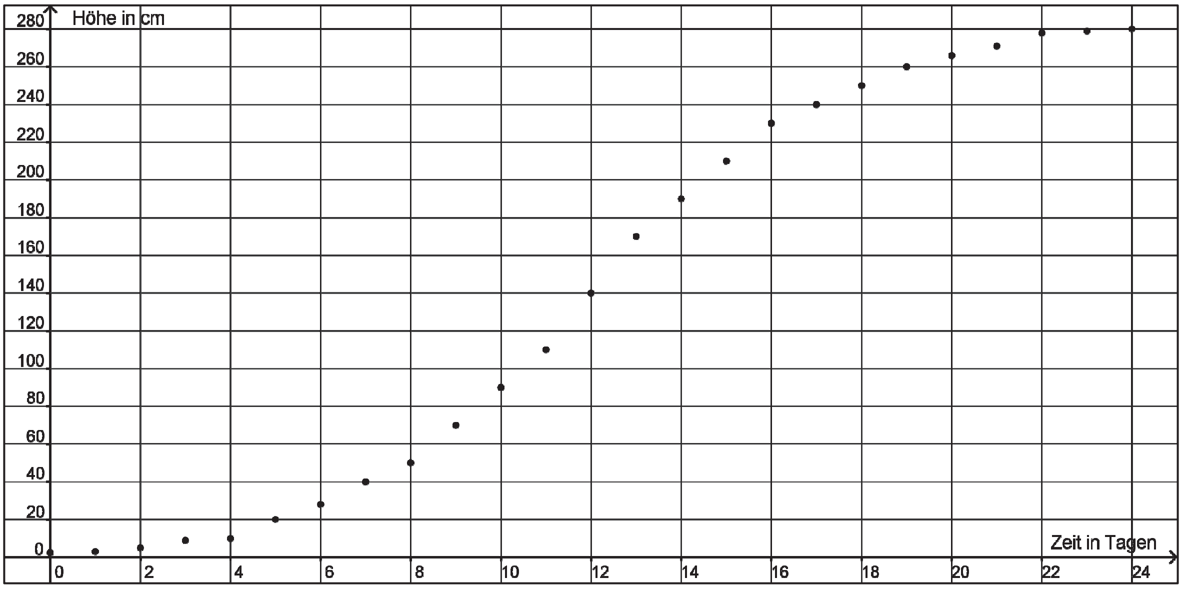

Abbildung 2

Der Schüler möchte auch hier eine ganzrationale Funktion f dritten Grades finden, die das Wachstum der Blüte aus Italien beschreibt. Dazu überlegt er sich, dass die Messungen gut durch eine Funktion f modelliert werden können, deren Ableitung f' von folgender Form ist:

$$f'(t) = a \cdot t \cdot (t-24)$$

Setzt man hier für a verschiedene Zahlen ein, so erhält man jedes Mal eine andere Funktionsgleichung für f'.

(1) *Skizzieren Sie im Bereich $0 \leq t \leq 24$ die vier zu $a=-1$, $a=-0{,}5$, $a=0{,}5$ und $a=1$ gehörenden Graphen von f' und beschreiben Sie die Gemeinsamkeiten dieser Graphen.*

(2) *Begründen Sie, warum für die Ableitungsfunktion f' der gesuchten Funktion f zur Modellierung der Messungen der obige Ansatz $f'(t) = a \cdot t \cdot (t-24)$ gewählt wird.*

(3) *Entscheiden Sie begründet, ob zur Modellierung des gegebenen Sachzusammenhanges a positiv oder negativ sein muss.*

(8 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung